

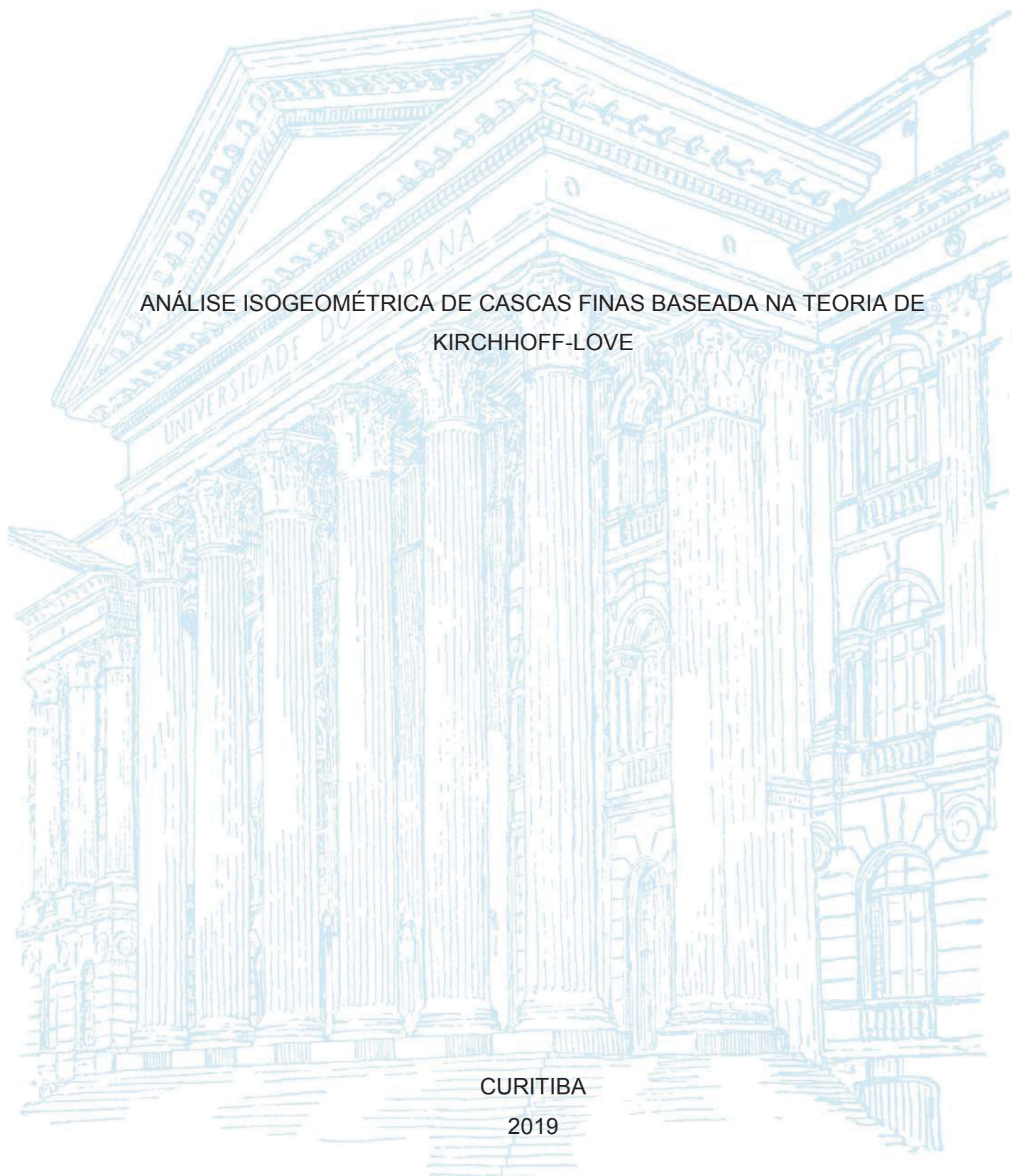
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JORGE LUIS GARCÍA ZÚÑIGA

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE CASCAS FINAS BASEADA NA TEORIA DE  
KIRCHHOFF-LOVE

CURITIBA

2019



JORGE LUIS GARCÍA ZÚÑIGA

ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE CASCAS FINAS BASEADA NA TEORIA DE  
KIRCHHOFF-LOVE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração em Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

Z95a

Zúñiga Jorge Luis García

Análise isogeométrica de cascas finas baseada na teoria de Kirchhoff-Love [recurso eletrônico] / Jorge Luis García Zúñiga. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2019.

Orientador: Roberto Dalledone Machado.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Geometria. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Título.

CDD: 624.171

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928




MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA - 40001016030PO

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JORGE LUIS GARCÍA ZÚÑIGA** intitulada: **ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE CASCAS FINAS BASEADA NA TEORIA DE KIRCHHOFF-LOVE**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Abril de 2019.



ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Avaliador Interno (UFPR)



SERGIO HENRIQUE PIALARISSI CAVALARO

Avaliador Externo (Universidade de Loughborough - Inglaterra)



MARCOS ARNDT

Avaliador Interno (UFPR)

*Às minhas filhas Myriam Ariana e Bruna Camila, para minha amada esposa Jenny  
Esmeralda pelo imenso apoio e amor.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Roberto Dalledone Machado pela orientação, paciência e ensinamentos transmitidos na realização deste trabalho.

Aos meus pais Jesus Antonio e Miryam, pelo incansável apoio em toda minha vida, não vou ter vida suficiente para terminar de agradecer-lhes.

Aos meus irmãos Luis Antonio e Eduardo Enrique, pelo carinho e apoio.

A meu amigo Phillipe Mendes Rosa, pelo apoio durante minha estadia no Brasil.

A meu amigo Jair Anjos, pela amizade e a sempre boa disposição que teve comigo.

Ao Prof. Emílio Eiji Kavamura, pelo template de dissertação em  $\text{\LaTeX}$  e sua ajuda na formatação do documento.

*“Huk allin yachaqqa yachay paqarichiq runami.  
Huk allin k’illikacha yachay kamayuq runa yachay  
chaninchasqan pisi pacha yachay paqarichisqawan  
yuyaykunawan puririchin. Ingeniería nisqapi manan  
ch’ulla yachaylla kamachisqa kanchu.”*

*“A good scientist is a person with original ideas.  
A good engineer is a person who makes a design  
that works with as few original ideas as possible.  
There are no prima donnas in engineering.”  
Freeman Dyson*

## RESUMO

Com a *Análise IsoGeométrica (AIG)*, é possível fazer o cálculo de estruturas tipo casca usando a geometria exata para todo tipo de malhas. Para isso, os polinômios de Lagrange são substituídos pelas funções *NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)* para desenvolver a análise, sendo as *NURBS* a tecnologia mais utilizada no ambiente *CAD (Computer Aided Design)* para o desenho. Adicionalmente, as funções *NURBS* têm uma ordem de continuidade alta, o que leva a uma maior precisão por grau de liberdade em comparação à solução de casca com a clássica *AEF (Análise por Elementos Finitos)*.

Nesta dissertação, o conceito isogeométrico é aplicado à análise de estruturas tipo casca fina. É desenvolvido um elemento tipo casca livre de rotações, usando a *teoria de cascas de Kirchhoff-Love* e *NURBS* como funções de base. A análise baseada em *NURBS* fornece vantagens especiais para cascas, já que o comportamento estrutural de uma casca é principalmente determinada por sua geometria, e portanto, uma boa descrição da geometria é essencial. Além disso, devido à descrição exata da geometria com *NURBS*, curvaturas podem ser avaliadas diretamente na superfície sem graus de liberdade rotacionais ou diretores nodais. Aspectos relativos às condições de contorno e ao tratamento de estruturas *multipatch* são revisados.

Os resultados dos diferentes exemplos numéricos desenvolvidos nesta dissertação sugerem que a *AIG* em geral apresenta uma maior precisão e razão de convergência em comparação à clássica *AEF*. Um método de refinamento da malha, chamado *refinamento k*, está disponível na *AIG*, mas não existe na clássica *AEF*, e prova ser uma maneira eficiente de melhorar ainda mais o desempenho da *AIG*. Além disso, vantagens em termos de economia de tempo devido a fluxos de trabalho mais eficientes também são mostradas. No enfoque atual ter que retornar ao modelo *CAD* toda vez que mudanças e refinamentos da malha são necessários na clássica *AEF* é uma tarefa tediosa. Assim, a capacidade de fazer ajustes e refinamentos diretamente no modelo da *AIG* é um ativo substancial.

**Palavras-chaves:** *Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. NURBS. Análise de cascas finas. Teoria de Kirchhoff-Love.*



## ABSTRACT

With the *IsoGeometric Analysis (IGA)*, the calculation of shell structures has become possible using the exact geometry for all types of meshes. For this, the Lagrange polynomials are replaced by the *NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)* functions to develop the analysis, *NURBS* are the most commonly used technology in the *CAD (Computer Aided Design)* environment for design. In addition, the *NURBS* functions have a high continuity order, which leads to greater accuracy per degree of freedom compared to shell solution with the classical *FEA (Finite Element Analysis)*.

In this dissertation, the isogeometric concept is applied to the analysis of thin shell structures. A rotation free shell element is developed, using *Kirchhoff-Love shell theory* and *NURBS* as basis functions. *NURBS* based analysis provides advantages specially for shells, since the structural behavior of a shell is mainly determined by its geometry and therefore a good geometric description is essential. In addition, due to the exact description of the geometry with *NURBS*, curvatures can be evaluated directly on the surface without rotational degrees of freedom or nodal directors. Aspects related to the boundary conditions and the treatment of *multipatch* structures are reviewed.

The results of the different numerical examples developed in this dissertation suggest that *IGA* in general presents a greater precision and convergence rate in comparison to the classic *FEA*. A mesh refinement method, called *k-refinement*, is available in *IGA*, but does not exist in classic *FEA*, and proves to be an efficient way to improving the performance of the *IGA*. Furthermore, advantages in terms of time savings due to more efficient work flows are also shown. In the current focus having to return to the *CAD* model every time changes and mesh refinement are required in classical *FEA* is a tedious task. Thus, the ability to make adjustments and refinements directly on the *IGA* model is a substantial asset.

**Key-words:** Isogeometric Analysis. Finite Element Method. NURBS. Analysis of thin shell. Kirchhoff-Love shell theory.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Curva B-Spline. . . . .	31
FIGURA 2 – Funções de base B-Spline cúbicas com vetor de nós aberto. . . .	32
FIGURA 3 – Derivadas das Funções de base B-Spline cúbicas com vetor de nós aberto. . . . .	33
FIGURA 4 – Funções de base B-Spline cúbicas com um nó interno com multi- plicidade. . . . .	35
FIGURA 5 – Curva B-Spline cúbica com nó interno com multiplicidade. . . . .	36
FIGURA 6 – Influência local dos pontos de controle sobre a curva B-Spline. . .	37
FIGURA 7 – Superfície B-Spline. . . . .	38
FIGURA 8 – Funções de base B-Spline bidimensionais. . . . .	39
FIGURA 9 – Função de base B-Spline bidimensional $\tilde{N}_{3,3}^{2,2}(\xi, \eta)$ . . . . .	40
FIGURA 10 – Sólido B-Spline. . . . .	41
FIGURA 11 – Transformação projetiva de uma curva B-Spline em $\mathbb{R}^3$ , numa curva NURBS (circulo) em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	42
FIGURA 12 – Curva NURBS com ponderação variável no ponto de controle superior $P_7$ . . . . .	45
FIGURA 13 – Variação das funções de base NURBS com uma ponderação variável no ponto de controle $P_7$ . . . . .	46
FIGURA 14 – Círculo exato representado por uma curva NURBS. . . . .	46
FIGURA 15 – Superfície NURBS de uma esfera. . . . .	47
FIGURA 16 – Inserção de nós numa curva B-Spline. . . . .	49
FIGURA 17 – Elevação de ordem de uma curva NURBS. . . . .	50
FIGURA 18 – Refinamento k de funções de base B-Spline. . . . .	51
FIGURA 19 – Refinamento por inserção de nós e elevação de ordem de uma superfície NURBS. . . . .	52
FIGURA 20 – Diferença entre continuidade paramétrica $C^1$ e continuidade geo- métrica $G^1$ . . . . .	53
FIGURA 21 – Curva B-Spline com continuidade geometrica $G^1$ . . . . .	55
FIGURA 22 – Modelos de análise para o clássico AEF e para AIG. . . . .	57
FIGURA 23 – Conceito isoparamétrico no âmbito da AEF e AIG. . . . .	59
FIGURA 24 – Elemento isogeométrico unidimensional. . . . .	61
FIGURA 25 – Elemento isogeométrico bidimensional. . . . .	61
FIGURA 26 – Espaços de análises em AIG. . . . .	63
FIGURA 27 – Mapeamento entre espaços. . . . .	65
FIGURA 28 – Refinamento “local” de um elemento NURBS. . . . .	67

FIGURA 29 – Cúpula de concreto do <i>Pantheon</i> . . . . .	70
FIGURA 30 – Cúpula do <i>Taj Mahal</i> . . . . .	70
FIGURA 31 – Cúpula da catedral <i>Hagia Sophia</i> . . . . .	71
FIGURA 32 – Cúpula da <i>igreja de St. Paul</i> . . . . .	71
FIGURA 33 – Superfície no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ . . . . .	72
FIGURA 34 – Definição de uma casca como corpo sólido. . . . .	76
FIGURA 35 – Campo de deslocamento $u$ de um ponto material. . . . .	77
FIGURA 36 – Deformação do vetor diretor. . . . .	81
FIGURA 37 – Tensões e forças devido à ação de membrana numa casca fina. .	86
FIGURA 38 – Tensões e momentos devido ao efeito de flexão numa casca fina.	86
FIGURA 39 – Placa modelada com NURBS para condições de contorno engas- tado e simplesmente apoiado. . . . .	95
FIGURA 40 – Cobertura de Scordelis-Lo. . . . .	97
FIGURA 41 – Cobertura de Scordelis-Lo. Configurações indeformada e deformada.	98
FIGURA 42 – Cobertura de Scordelis-Lo. Convergência do deslocamento vertical no ponto médio da borda livre. . . . .	99
FIGURA 43 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	100
FIGURA 44 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	100
FIGURA 45 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	100
FIGURA 46 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente $\hat{n}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	101
FIGURA 47 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente $\hat{n}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	101
FIGURA 48 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente $\hat{n}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	101
FIGURA 49 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	102
FIGURA 50 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	102
FIGURA 51 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	102
FIGURA 52 – Cobertura de Scordelis-Lo. Comparação entre os modelos de AEF e AIG. . . . .	103

FIGURA 53 – Cilindro comprimido. . . . .	105
FIGURA 54 – Cilindro comprimido. Configurações indeformada e deformada. . .	105
FIGURA 55 – Cilindro comprimido. Convergência do deslocamento vertical no ponto de aplicação das cargas pontuais. . . . .	106
FIGURA 56 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	107
FIGURA 57 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	107
FIGURA 58 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	108
FIGURA 59 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{11}$ . Mo- delo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	108
FIGURA 60 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{22}$ . Mo- delo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	109
FIGURA 61 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{12}$ . Mo- delo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	109
FIGURA 62 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	110
FIGURA 63 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	110
FIGURA 64 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	111
FIGURA 65 – Cilindro comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG. . .	111
FIGURA 66 – Hemisfério comprimido. . . . .	113
FIGURA 67 – Hemisfério comprimido. Configurações indeformadas. . . . .	113
FIGURA 68 – Hemisfério comprimido. Configurações deformadas. . . . .	114
FIGURA 69 – Hemisfério comprimido completo. Convergência do deslocamento radial no ponto de aplicação das cargas pontuais. . . . .	115
FIGURA 70 – Hemisfério comprimido com buraco. Convergência do desloca- mento radial no ponto de aplicação das cargas pontuais. . . . .	115
FIGURA 71 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	116
FIGURA 72 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	116
FIGURA 73 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . .	117
FIGURA 74 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . .	117

FIGURA 75 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	118
FIGURA 76 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente $\hat{n}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.	118
FIGURA 77 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	119
FIGURA 78 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	119
FIGURA 79 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita. . . . .	120
FIGURA 80 – Hemisfério completo comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG. . . . .	121
FIGURA 81 – Hemisfério com buraco comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG. . . . .	121
FIGURA 82 – Hemisfério completo. Parametrização usada para gerar a geometria com NURBS. . . . .	122
FIGURA 83 – Casca cilíndrica fina. Geometria e pressão interna . . . . .	123
FIGURA 84 – Casca cilíndrica fina. Vista superior das Continuidades no modelo.	125
FIGURA 85 – Casca cilíndrica fina. Multipatch suaves. . . . .	126
FIGURA 86 – Casca cilíndrica fina. Faixa de flexão. . . . .	129
FIGURA 87 – Casca cilíndrica fina. Configurações indeformada e deformada. . .	130
FIGURA 88 – Casca cilíndrica fina. Malha usada na AIG. . . . .	131
FIGURA 89 – Casca cilíndrica fina. Contornos do deslocamento radial. . . . .	131
FIGURA 90 – Casca cilíndrica fina. Perfil do deslocamento radial com <i>Multipatch suaves</i> . . . . .	132
FIGURA 91 – Casca cilíndrica fina. Perfil do deslocamento radial com <i>Faixa de flexão</i> . . . . .	132

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Diferenças entre a AIG e a AEF. . . . .	66
TABELA 2 – Cobertura de Scordelis-Lo. Parâmetros para o modelo. . . . .	97
TABELA 3 – Cilindro comprimido. Parâmetros para o modelo. . . . .	104
TABELA 4 – Hemisfério comprimido. Parâmetros para os modelos. . . . .	112
TABELA 5 – Casca cilíndrica fina. Parâmetros para o modelo. . . . .	124

## **LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS**

**AEF** - Análise por Elementos Finitos

**AIG** - Análise Isogeométrica

**B-Spline** - Basis-Spline

**CAD** - Computer Aided Design

**CAE** - Computer Aided Engineering

**MEF** - Método dos Elementos Finitos

**NURBS** - Non Uniform Rational B-Splines

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x, y, z$	Eixos coordenados
$p$	Grau das funções de base B-Spline na direção paramétrica $\xi$
$q$	Grau das funções de base B-Spline na direção paramétrica $\eta$
$r$	Grau das funções de base B-Spline na direção paramétrica $\zeta$
$\xi, \eta, \zeta$	Coordenadas paramétricas
$\Xi$	Vetor de nós na direção de $\xi$
$H$	Vetor de nós na direção de $\eta$
$Z$	Vetor de nós na direção de $\zeta$
$N_{i,p}(\xi)$	Função de base B-Spline obtida a partir do vetor de nós $\Xi$
$M_{j,q}(\eta)$	Função de base B-Spline obtida a partir do vetor de nós $H$
$\tilde{N}_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$	Função de base B-Spline bidimensional
$N_{i,p}^k(\xi)$	k-ésima derivada da função de base $N_{i,p}(\xi)$
$M_{j,q}^k(\eta)$	k-ésima derivada da função de base $N_{j,q}(\eta)$
$C(\xi)$	Curva B-Spline/NURBS
$S(\xi, \eta)$	Superfície B-Spline/NURBS
$B(\xi, \eta, \zeta)$	Sólido B-Spline/NURBS
$P_i$	Vetor de pontos de controle para uma Curva B-Spline/NURBS
$P_{i,j}$	Vetor de pontos de controle para uma Superfície B-Spline/NURBS
$P_{i,j,r}$	Vetor de pontos de controle para um Sólido B-Spline/NURBS
$w_i$	Peso $i$ de uma função de base NURBS unidimensional
$w_{i,j}$	Peso $i, j$ de uma função de base NURBS bidimensional
$w_{i,j,k}$	Peso $i, j, k$ de uma função de base NURBS tridimensional
$R_i^p(\xi)$	Funções de base NURBS unidimensionais
$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$	Funções de base NURBS bidimensionais



$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$	Funções de base NURBS tridimensionais
$C^k$	Continuidade paramétrica ou matemática
$G^k$	Continuidade geométrica ou física
$\Omega^e$	Dominio físico
$\hat{\Omega}^e$	Dominio paramétrico
$\tilde{\Omega}^e$	Dominio de integração
$J_{x,\xi}$	Jacobiano da transformação do espaço físico ao espaço paramétrico
$J_{\xi,\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$	Jacobiano da transformação do espaço paramétrico ao espaço de integração
$J_{x,\tilde{\xi}}$	Jacobiano da transformação do espaço físico ao espaço de integração
$g_i$	Vetores de base covariante
$g^i$	Vetores de base contravariante
$\theta^i$	Coordenadas contravariantes
$\theta_i$	Coordenadas covariantes
$\delta_i^j$	Função Delta de Kronecker
$e_i$	Vetores de base cartesiana local
$g$	Tensor métrico
$g_{\alpha\beta}$	Coeficientes metricos covariante
$g^{\alpha\beta}$	Coeficientes metricos contravariante
$b_{\alpha\beta}$	Coeficientes do tensor de curvaturas
$u$	Deslocamento de um ponto material
$F$	Gradiente de deformação
$E$	Tensor de deformação de Green-Lagrange
$E_{ij}$	Coeficientes de deformação de Green-Lagrange
$I$	Tensor de identidade de segundo ordem
$\Pi$	Tensor de identidade de quarto ordem

$\sigma$	Tensor de tensão de Cauchy
$\sigma^{ij}$	Coeficientes de tensão de Cauchy
$C$	Tensor de elasticidade
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$\rho_0$	Densidade
$\delta W$	Trabalho virtual
$\delta W_{int}$	Trabalho virtual interno
$\delta W_{ext}$	Trabalho virtual externo
$T$	Vetor de forças de contorno
$\Omega$	Domínio da configuração de referência
$\Gamma$	Contorno da configuração de referência
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	Deformações de membrana
$\kappa_{\alpha\beta}$	Mudança na curvatura
$n$	Tensões de membrana generalizadas no plano
$m$	Tensões de flexão generalizadas no plano
$\tilde{D}$	Matriz do material
$D^{iso}$	Matriz do material para um material isotrópico
$t$	Espessura da casca
$E$	Módulo de elasticidade (Módulo de Young)
$\nu$	Razão de Poisson
$\delta u_r$	Variação arbitrária do deslocamento
$F^{ext}$	Forças externas nodais
$K_{rs}^{int}$	Matriz de rigidez
$M$	Matriz que relaciona as deformações e os deslocamentos para ações de membrana
$B$	Matriz que relaciona as deformações e os deslocamentos para ações de flexão

$\hat{n}$	Tensões de membrana generalizadas no plano no sistema de coordenadas locais
$\hat{m}$	Tensões de flexão generalizadas no plano no sistema de coordenadas locais
$\hat{\sigma}^{\alpha\beta}$	Tensões no plano para o sistema de coordenadas locais
$\hat{\sigma}_{min}^{max}$	Tensões principais para o sistema de coordenadas locais

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>22</b>
1.1	OBJETIVO GERAL	24
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	25
1.3	JUSTIFICATIVA	25
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	25
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM GEOMÉTRICA USANDO NURBS</b>	<b>30</b>
3.1	B-SPLINES	30
3.1.1	Vetor de nós	31
3.1.2	Funções de base B-Spline	32
3.1.3	Derivada da função base B-Spline	33
3.1.4	Curvas B-Spline	35
3.1.5	Superfícies B-Spline	38
3.1.6	Sólidos B-Spline	40
3.2	NURBS	41
3.2.1	Transformação projetiva	41
3.2.2	Funções de base NURBS	42
3.2.3	Derivada da função base NURBS	43
3.2.4	Curva NURBS	44
3.2.5	Superfície NURBS	45
3.2.6	Sólido NURBS	47
3.3	REFINAMENTO DE B-SPLINES E NURBS	48
3.3.1	Inserção de nós	48
3.3.2	Elevação de ordem	48
3.3.3	Refinamento k	50
3.4	CONTINUIDADE	52
3.4.1	Continuidade paramétrica v.s. continuidade geométrica	52
3.4.2	Continuidade $G^1$ para curvas B-Spline	53
3.4.3	Continuidade $G^1$ para superfícies B-Spline	54
3.4.4	Continuidade $G^1$ para superfícies NURBS	55
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA</b>	<b>56</b>
4.1	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA BASEADA EM NURBS	57
4.2	O CONCEITO ISOPARAMÉTRICO	58

4.3	ELEMENTO ISOGEOMÉTRICO NURBS . . . . .	58
4.4	ESPAÇOS DE ANÁLISE . . . . .	62
4.4.1	Malha física e malha de controle . . . . .	62
4.4.2	Espaço físico . . . . .	63
4.4.3	Espaço de índices . . . . .	64
4.4.4	Espaço paramétrico . . . . .	64
4.4.5	Espaço de integração de Gauss . . . . .	64
4.5	MAPEAMENTO . . . . .	65
4.6	COMPARAÇÃO DA AIG COM A CLÁSSICA AEF . . . . .	66
4.7	REFINAMENTO NA AIG . . . . .	67
<b>5</b>	<b>CASCAS DE KIRCHHOFF – LOVE BASEADAS EM NURBS . . . . .</b>	<b>69</b>
5.1	GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFÍCIES . . . . .	72
5.2	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO . . . . .	76
5.2.1	Cinemática . . . . .	77
5.2.2	Equações constitutivas . . . . .	79
5.2.3	Equilíbrio . . . . .	79
5.3	TEORIA DE CASCAS DE KIRCHHOFF-LOVE . . . . .	80
5.4	FORMULAÇÃO DE ELEMENTO COM NURBS . . . . .	87
5.5	RECUPERAÇÃO DE TENSÕES . . . . .	92
5.6	CONDIÇÕES DE CONTORNO EM MODELOS DE CASCAS COM AIG . . . . .	94
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>96</b>
6.1	COBERTURA DE SCORDELIS-LO . . . . .	96
6.1.1	Configuração do problema . . . . .	96
6.1.2	Verificação de resultados . . . . .	97
6.1.3	Comparação de precisão e razão de convergência . . . . .	103
6.2	CILINDRO COMPRIMIDO . . . . .	104
6.2.1	Configuração do problema . . . . .	104
6.2.2	Verificação de resultados . . . . .	104
6.2.3	Comparação de precisão e razão de convergência . . . . .	111
6.3	HEMISFÉRIO COMPRIMIDO . . . . .	112
6.3.1	Configuração do problema . . . . .	112
6.3.2	Verificação de resultados . . . . .	113
6.3.3	Comparação de precisão e razão de convergência . . . . .	120
6.4	CASCA CILÍNDRICA FINA COM EXTREMOS ENGASTADOS SUBME- TIDA A PRESSÃO INTERNA CONSTANTE . . . . .	123
6.4.1	Configuração do problema . . . . .	123
6.4.2	Cascas multipatch . . . . .	125

6.4.2.1	Multipatch suaves . . . . .	126
6.4.2.2	Método da faixa de flexão . . . . .	128
6.4.3	Verificação de resultados . . . . .	130
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>134</b>
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	135
	 <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	 <b>137</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As estruturas curvas de paredes finas representam um elemento de construção fundamental na natureza e na tecnologia. Os exemplos vão desde cascas de ovos, paredes de células ou folhas de plantas a estruturas de casca em engenharia, como na indústria automotiva, construção de aeronaves, tecnologia aeroespacial ou engenharia civil. As estruturas de casca são meios contínuos tridimensionais, sendo uma dimensão significativamente menor que as duas restantes. Devido à curvatura, as cascas são capazes de suportar as cargas transversais com ações de membrana e, assim, otimizar o uso do material. Isso acaba gerando estruturas altamente otimizadas e eficientes, que podem ser construídas com uma grande esbeltez e com uma excelente capacidade de carga. O aproveitamento dessa propriedade, porém, traz sensibilidades significativas às imperfeições em relação à geometria e ao carregamento. Pequenas mudanças nos parâmetros de entrada do projeto da casca e do tipo de carregamento podem resultar em grandes mudanças na resposta do sistema.

A primeira teoria de cascas remonta-se a *Gustav R. Kirchhoff*, que em 1850 desenvolveu a primeira teoria de placas (OÑATE, E., 2013). A teoria de placas de *Kirchhoff* é designada por “*teoria clássica de placas*”. *August E. H. Love* desenvolveu uma teoria de cascas que é baseada nas suposições de *Kirchhoff* e, portanto, é conhecida como a *teoria de cascas de Kirchhoff-Love*. Uma segunda proeminente teoria de cascas é a *teoria de cascas de Reissner-Mindlin* que, em contraste com a teoria de *Kirchhoff-Love*, leva em conta as deformações de cisalhamento transversais (OÑATE, E., 2013). Estes são desprezáveis para as cascas finas, mas podem ser importantes para cascas espessas. O limite entre o espesso e o fino é definido pela esbeltez da casca, que é definida como a razão do raio de curvatura sobre a espessura (KIENDL, 2011). Uma casca espessa é definida por uma esbeltez de  $R/t < 20$ . Embora a maioria das cascas em aplicações práticas possam ser classificadas como cascas finas, a *teoria de Reissner-Mindlin* desempenha um papel dominante na análise de cascas usando o *Método dos Elementos Finitos (MEF)*.

O *Método dos Elementos Finitos (MEF)* (ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, 2000) (BATHE, K. J., 2006) (OÑATE, Eugenio, 2010) (HUGHES, 2012), é um procedimento numérico para determinar soluções aproximadas de problemas de valor de contorno de equações diferenciais e é hoje em dia o método predominante na análise de estruturas. O *MEF* subdivide o domínio em muitos pequenos elementos “*finitos*” com formas simples. Esses elementos são definidos por um conjunto de pontos nodais, que são conectados por funções de base. Os polinômios lineares são as funções de base mais utilizadas, devido a sua simplicidade e versatilidade dos elementos resultantes.

O problema é que com tais elementos normalmente não há continuidade maior que  $C^0$  entre os elementos. Mesmo com polinômios de alta ordem, não é possível garantir a continuidade  $C^1$  para elementos de forma arbitrária. Esta limitação impede o uso direto da *teoria de cascas de Kirchhoff-Love*, já que esta requer integrabilidade de derivadas de segunda ordem e, portanto, pelo menos, continuidade  $C^1$ . A *teoria de cascas de Reissner-Mindlin*, onde rotações e deflexões são tratadas como dois campos independentes, requer somente continuidade  $C^0$ . Portanto, a maioria das formulações de elementos de casca é baseada nesta teoria, independente da distinção entre cascas espessas e finas. O problema é que, especialmente para as cascas finas, esses elementos sofrem de vários fenômenos de bloqueio, que são principalmente atribuídos ao uso de funções de base de baixa ordem. O bloqueio ou “locking” é um problema típico dos elementos de casca, e um grande esforço foi dedicado e muitos métodos diferentes foram desenvolvidos para evitar ou pelo menos reduzir os efeitos de *locking* (OÑATE, E., 2013).

É importante comentar também que o fluxo de trabalho entre o desenho e a análise num software comum de *CAE* (*Computer Aided Engineering*) em geral usa dois modelos separados para a definição da geometria. O processo de desenho geralmente é baseado numa técnica de descrição *CAD* (*Computer Aided Design*) da geometria, como *NURBS* (*Non-Uniform Rational B-Spline*). O modelo para *AEF* (*Análise por Elementos Finitos*) geralmente usa funções de base lineares de Lagrange. Esses dois conjuntos distintos para o modelo da geometria não são compatíveis. Assim, mudanças na geometria ou no refinamento da malha requerem interação entre o *CAD* e o modelo da *AEF*, incluindo uma custosa conversão da geometria a qual é somente uma aproximação da geometria original. De acordo com Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), perto de 80% do tempo total da análise é dedicado à geração de malhas em indústrias automotivas e similares. O uso de uma descrição comum da geometria poderia permitir uma vinculação mais próxima entre esses dois processos e reduzir os tempos de análise. Mas é importante mencionar que as geometrias criadas no desenho industrial frequentemente não são adequadas para a análise, devido a uma má parametrização ou à inclusão de muitos detalhes. Assim, mesmo com um fluxo de trabalho integrado, atingido por uma descrição da geometria comum, a geometria pode ter que ser redefinida até certo ponto. Um estudo mais detalhado sobre custos de tempo relativos para processos de *CAE* é dado em Hughes, Bazilevs e Cottrell (2009). Aqui, os custos típicos nos *Sandia National Laboratories* são detalhados. Os custos de tempo para a criação de um modelo sólido de análise (representando 21%) e para o malhado (representando 14%) poderiam ser reduzidos a quase zero. A decomposição da geometria (representando 32%) para remover detalhes não necessários para a análise e todas as outras etapas ainda serão necessárias. É importante mencionar que os custos relativos ao tempo de análise real representam apenas 4%. A criação de uma



geometria adequada para a análise a partir da geometria *CAD* é hoje o gargalo para grandes cálculos em engenharia, e a criação da malha é uma parte dessa transferência do modelo. Uma nova forma de análise, chamada de *Análise Isogeométrica (AIG)*, tenta fechar essa lacuna entre o *CAD* e o mundo da *CAE*, de tal forma que ambas disciplinas trabalhem sobre o mesmo modelo geométrico.

O artigo seminal de *Hughes et al.* sobre *AIG* (HUGHES; COTTRELL; BAZI-LEVS, 2005) foi provavelmente o primeiro a lançar a ideia de integrar os métodos populares de *CAD* e análise num conceito uniforme e consistente. A ideia básica é evitar o processo da geração da malha adotando a descrição da geometria do desenho para a análise. As *NURBS* são a tecnologia mais difundida em programas *CAD* e, portanto, são usadas como funções de base para análise. Tem sido mostrado que as *NURBS* cumprem as condições necessárias para funções de base e, portanto, a análise pode ser realizada sobre o modelo *NURBS* sem conversão da geometria. A aplicação das funções significativamente mais ricas do *CAD* para a *AEF* melhora a precisão de soluções discretas, em comparação às discretizações  $C^0$  do contínuo que se faz na clássica *AEF*. Com relação ao análise de cascas, as *NURBS* oferecem um potencial e recursos completamente novos. A propriedade de alta continuidade das *NURBS* permite a formulação direta de *elementos de cascas de Kirchhoff-Love*. A *AIG* baseada em *NURBS* vem ganhando crescente interesse e tem sido aplicada com grande sucesso ao estudo de sólidos, cascas, fluidos, interação fluido-estrutura, turbulência e otimização estrutural.

Nesta dissertação, o conceito isogeométrico é aplicado para a análise de cascas. Em primeiro lugar, *NURBS* como base para modelagem geométrica são estudados, assim como seu uso para *AIG*. O elemento de casca proposto por *J. Kiendl* (KIENDL; BLETZINGER et al., 2009) é desenvolvido. Este elemento de casca usa a teoria de *Kirchhoff-Love* e *NURBS* como funções de base. A formulação é feita para problemas com linearidade geométrica de modo que é aplicável para pequenas deformações. Diferentes exemplos numéricos são realizados para testar esta formulação. Aspectos especiais sobre condições de contorno e a modelagem com múltiplos patches *NURBS* são discutidos e as soluções são apresentadas e testadas.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma formulação de casca baseada na *teoria de Kirchhoff-Love* e adaptada às possibilidades oferecidas pelo conceito isogeométrico. A característica das *NURBS* de ter uma alta continuidade deverá ser explorada para atingir um nível de eficiência que seja superior às formulações de cascas padrão da *AEF*.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar detalhadamente os fundamentos da *AIG* e sua aplicação no problema de casca baseada na *teoria de Kirchhoff-Love*.
- Fazer uma revisão sobre as possíveis soluções para a *AIG* de cascas com vários patches *NURBS* (multipatch).
- Fazer a implementação num código da formulação da *AIG* de casca baseada na *teoria de Kirchhoff-Love*.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

Com base nas pesquisas atuais, a hipótese é que a *AIG* de cascas se mostrará mais eficiente em termos de tempo e produzirá resultados mais precisos que a clássica *AEF*. As principais razões incluem a eliminação da etapa de conversão da geometria CAD para malhas clássicas da *AEF* e, assim evitar o erro geométrico que, de outra forma, é introduzido pelas clássicas funções de base da *AEF*.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho segue a seguinte estrutura:

- *Capítulo 2*: Apresenta-se uma revisão da literatura a respeito da *Análise Isogeométrica (AIG)* de cascas.
- *Capítulo 3*: As noções sobre geometria computacional que são necessárias nesta dissertação são revisados. Para isso, são apresentados os fundamentos para a modelagem geométrica de curvas e superfícies, necessários para entender as *NURBS*.
- *Capítulo 4*: Os fundamentos da *Análise Isogeométrica (AIG)* são revisados, e as particularidades e diferenças com respeito ao tradicional *Análise por Elementos Finitos (AEF)* são discutidas.
- *Capítulo 5*: Neste capítulo, as fórmulas da geometria diferencial de superfícies são revisadas, as quais são necessárias para as equações cinemáticas da teoria de cascas. Os fundamentos da mecânica estrutural são revisados. As equações gerais da mecânica do contínuo são apresentadas. Então, elas são especificadas para a teoria de cascas de *Kirchhoff-Love*, empregando as respectivas suposições cinemáticas. A formulação isogeométrica da casca de *Kirchhoff-Love* é apresentada. As equações são derivadas em detalhe, de modo que sejam fáceis

de implementar. Fornece-se um procedimento geral para calcular os valores das tensões físicas a partir da solução obtida por uma análise baseada em deslocamentos. Finalmente, o tratamento das condições de contorno rotacionais com esta formulação é discutido.

- *Capítulo 6*: A formulação de casca apresentada é testada num conjunto de exemplos numéricos, isto é feito inicialmente para modelos constituídos só por um patch. O problema de estruturas formadas de múltiplos patches de *NURBS* é discutido e duas soluções diferentes são apresentadas. Estas duas soluções são testadas com um último exemplo numérico.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Desde o século XVIII, grandes esforços foram feitos para descrever adequadamente o comportamento da transmissão de cargas em estruturas tipo casca. Inicialmente, as considerações mecânica-descritivas foram substituídas cada vez mais por uma análise teórica e matemática (BEER, 2015). Hoje em dia, em particular, os métodos numéricos são aplicados para a análise de cascas. Um desses métodos numéricos, é o *Método dos Elementos Finitos (MEF)* que atualmente é o mais usado nas análises de estruturas contínuas. Um dos primeiros elementos finitos propostos para modelagem de cascas baseado na *teoria de Kirchhoff-Love* foi o elemento *SHEBA* proposto por Argyris e Scharpf (ARGYRIS; SCHARPF, 1968). Os requerimentos de continuidade sobre os deslocamentos foram obtidos usando funções de base polinomiais de quinta ordem, o que consequentemente levou a uma formulação complexa do elemento. Outro elemento finito do tipo Kirchhoff-Love é o *Bogner-Fox-Schmit (BFS)* que está baseado em funções de base Hermitianas de alta ordem (BOGNER; FOX; SCHMIT, 1960). Um problema desses primeiros elementos, os quais estão baseados em polinômios locais, é que para malhas não estruturadas, as funções de base e suas derivadas precisam ter pelo menos continuidade  $C^1$  nos limites entre os elementos (ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, 2000). Devido à dificuldade de obter elementos com continuidade igual ou maior a  $C^1$ , que é o requisito indispensável para elementos de casca baseados na *teoria de Kirchhoff-Love*, nas formulações de novos elementos finitos para modelagem de cascas preferiu-se usar a *teoria de Reissner-Mindlin* que adiciona um campo independente de deformações por cisalhamento à cinemática da casca (OÑATE, E., 2013). Assim, o requerimento de continuidade sobre as funções de base foi reduzido a continuidade  $C^0$ , e isto leva a teorias de primeira ordem. Porém, a vantagem do uso de funções de base de baixa ordem está afetada pela existência de graves problemas de bloqueio ou travamento da solução. Com a finalidade de resolver os problemas de bloqueio se desenvolveram várias soluções, uma delas é o uso da integração reduzida, entre muitas outras (OÑATE, E., 2013). Nesta dissertação, com a finalidade de fazer comparações faz-se uso de um elemento finito baseado na *teoria de Reissner-Mindlin* e que é implementado no software chamado *SAPUNSA* (GARCÍA; FRISANCHO, 2010). Neste caso, o elemento casca é obtido por meio de uma combinação de um elemento membrana com graus de liberdade de rotação (IBRAHIMBEGOVIĆ, 1990) e um elemento placa que tem uma interpolação hierárquica do deslocamento e um campo de deformações por cisalhamento assumido (IBRAHIMBEGOVIĆ, 1993).

A ideia de mudar o uso de funções polinomiais de baixa ordem e baixa continuidade na *Análise de Elementos Finitos (AEF)* não é totalmente nova. *Splines* de alta

ordem e de alta continuidade já foram usadas como funções de base de elementos desde pelo menos a década de 1970. Em [Swartz e Wendroff \(1974\)](#), formulações de elementos baseados em Splines foram comparadas com métodos de diferenças finitas para problemas dependentes do tempo. [Prenter \(1975\)](#) apresentou métodos variacionais e esquemas numéricos para os métodos de elementos finitos e de colocação sobre a base de espaços de Splines. Estruturas elásticas de placas compostas foram analisadas em [Chung-Tze \(1979\)](#) usando-se B-Splines cúbicas como bases para elementos finitos. O autor identificou uma precisão melhorada em comparação a discretizações convencionais de elementos finitos e poupanças em requerimentos de memória e custos computacionais. Elementos finitos baseados em B-Splines para a análise de cascas de revolução foram desenvolvidos em [Fan e Luah \(1990\)](#). Embora várias publicações sobre elementos finitos com Splines tenham sido publicadas há mais de 40 anos, o artigo de [Hughes et al. \(HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005\)](#) foi provavelmente o primeiro com o objetivo de juntar o desenho e análise num único modelo usando uma representação da geometria unificada. *NURBS* são a tecnologia mais difundida nas atuais ferramentas de modelagem *CAD* e, portanto, são adotadas como funções de base para análise. A aplicação de *NURBS* como funções de base para a análise melhora a precisão da solução em comparação às funções de base polinomiais de continuidade  $C^0$ . Isto foi documentado pela primeira vez para problemas de mecânica de estruturas e mecânica de fluidos em [Hughes, Cottrell e Bazilevs \(2005\)](#), [Cottrell, Reali et al. \(2006\)](#) e [Cottrell, Hughes e Reali \(2007\)](#). Com relação à análise de cascas, as *NURBS* oferecem capacidades e potenciais completamente novos. A propriedade de alta continuidade das *NURBS* é usada nesta dissertação, e permite a formulação direta de elementos de cascas baseados na *teoria de Kirchhoff-Love*.

[Cirak, Ortiz e Schröder \(2000\)](#) derivaram um elemento finito de casca com a cinemática da *teoria de Kirchhoff-Love* baseado na *subdivisão de superfícies* em *CAD* (exata continuidade  $C^1$ ) para a análise de estruturas de casca finas e moderadamente espessas. A principal desvantagem das técnicas de subdivisão, as quais se originaram na indústria de animação, é a falta de compatibilidade com *NURBS* que representam a ferramenta padrão no desenho de engenharia. Em [Long, Burkhard Bornemann e Cirak \(2012\)](#), um esquema de discretização adicional por subdivisão foi desenvolvido. A formulação toma em conta as considerações cinemáticas tanto de *Reissner-Mindlin* assim como as de *Kirchhoff-Love*, introduzindo um vetor de cisalhamento que é sobreposto ao vetor normal na configuração deformada para modelar o comportamento estrutural de cascas espessas. Uma parametrização independente dos deslocamentos da superfície média e do vetor de cisalhamento evita incompatibilidades no modelo discreto a priori e, portanto, o bloqueio por cisalhamento transversal. A remoção completa do vetor de cisalhamento recupera a cinemática de casca de *Kirchhoff-Love*.

O primeiro elemento de casca isogeométrico baseado em *NURBS*, com a

cinemática de *Kirchhoff-Love* para problemas não lineares, foi apresentado em [Kiendl, Bletzinger et al. \(2009\)](#). A formulação gera um elemento que está livre de graus de liberdade de rotação e, portanto, baseado somente nos graus de liberdade de deslocamento da superfície média. A modelagem de contornos engastados e condições de simetria é realizada restringindo os graus de liberdade de deslocamento das duas primeiras filas de pontos de controle adjacentes ao contorno, que são necessários para fixar a tangente. Nenhum método do *MEF* é usado para evitar o bloqueio de membrana. Em estruturas com vários patches, os autores sugerem a aplicação de equações de restrição para os pontos de controle ao longo das bordas comuns, a fim de preservar a alta continuidade nas interfaces dos patches. Num artigo subsequente, [Kiendl, Bazilevs et al. \(2010\)](#), alternativamente introduziram um método de penalização denominado como *faixa de flexão* para acoplar vários patches de superfícies *NURBS* num sentido fraco para a análise de cascas finas.

Uma casca isogeométrica baseada em *NURBS* e com a cinemática da *teoria de Reissner-Mindlin* foi apresentada por [Benson, Bazilevs et al. \(2010\)](#), a qual, em comparação à formulação de *J. Kiendl*, considera os efeitos de cisalhamento transversal e, portanto, é mais adequada para a análise de cascas espessas. A formulação é baseada no conceito de degeneração. Novamente, esta é uma formulação que tem somente graus de liberdade de deslocamento. Este elemento é propenso ao bloqueio por cisalhamento transversal e ao bloqueio de membrana. Na cinemática da casca, o vetor diretor não é construído exatamente a partir do espaço tangente à superfície, senão é calculado aproximadamente pela projeção dos pontos mais próximos sobre a superfície da casca. Portanto, o diretor pode desviar-se significativamente da orientação da normal da casca. Outros desenvolvimentos baseados na *teoria de Reissner-Mindlin* podem ser encontrados em [Benson, Bazilevs et al. \(2011\)](#), [Veiga et al. \(2012\)](#), [Dornisch, Klinkel e Simeon \(2013\)](#), [Benson, Hartmann et al. \(2013\)](#), [Du, Zhao e Wang \(2015\)](#) e [Dornisch, Müller e Klinkel \(2016\)](#).

### 3 MODELAGEM GEOMÉTRICA USANDO NURBS

Neste capítulo, as funções B-Splines e as NURBS são apresentadas de um jeito compacto para descrever a geometria. Este capítulo mostrará as razões pelas quais as B-Splines são uma base atraente, não apenas para CAD, senão também em uma estrutura de análise. Para este fim, algumas observações já são feitas à luz da análise com B-Splines, como preliminar para o capítulo 4. O capítulo começa com a definição do espaço paramétrico (Vetor de nós) e as funções básicas B-Spline. Posteriormente, a construção de curvas e superfícies será abordada, e as possibilidades de refinar a base serão discutidas. Ao final do capítulo serão revisados os conceitos de continuidade geométrica e continuidade paramétrica.

Há três diferentes tipos de descrições matemáticas de curvas e superfícies: a explícita, a implícita e a descrição paramétrica. As curvas e superfícies NURBS pertencem à categoria de descrições paramétricas. Este é o grupo mais relevante de descrições matemáticas, quando se trata de geometrias de forma livre. As NURBS como descrições geométricas são uma ferramenta poderosa que tornou-se padrão na modelagem CAD devido à sua versatilidade na capacidade de representar formas livres suaves assim como formas lineares, bordas afiadas, objetos geométricos tais como esferas e muito mais. Já que as NURBS constituem a base da análise isogeométrica, o primeiro passo para entender o método de análise é entender as NURBS.

Neste capítulo, a notação de Hughes et al. ([HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009](#)) combinado com Piegl e Tiller ([PIEGL; TILLER, 1997](#)) é usada. Outras referências importantes para este capítulo são os trabalhos de [Farin \(2002\)](#), [Rogers \(2001\)](#) e [Hughes, Cottrell e Bazilevs \(2005\)](#).

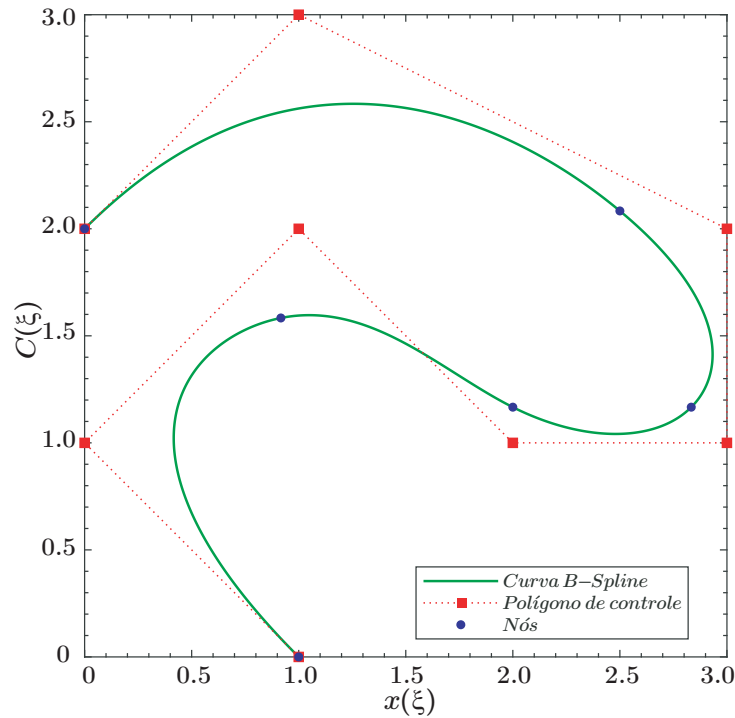
#### 3.1 B-SPLINES

Curvas B-Spline são definidas pela combinação linear de pontos de controle e funções de base sobre um espaço paramétrico. As funções de base são chamadas B-Splines (forma curta de Basis-Spline). O espaço paramétrico é dividido em intervalos e as B-Splines são definidas por partes sobre esses intervalos, com certos requisitos de continuidade entre os intervalos. Como o número de intervalos é arbitrário, o grau polinomial pode ser escolhido independentemente do número de pontos de controle. Portanto, um grande conjunto de pontos de dados pode ser aproximado ao usar um baixo grau polinomial. Na [FIGURA 1](#) mostram-se oito pontos de controle que são aproximados por uma curva B-Spline com  $p = 3$ . Como consequência do baixo grau polinomial, a curva B-Spline consiste de cinco seções. Seus limites, chamados nós, são



indicados por pequenos círculos de cor azul na curva. As funções de base B-Spline são definidas para ser diferentes de zero somente sobre uma faixa restrita de intervalos, o que significa uma influência local dos pontos de controle na curva. Além disso, é possível reduzir a continuidade nas funções de base entre intervalos e, portanto, criar dobras dentro de uma curva.

FIGURA 1 – Curva B-Spline.



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

### 3.1.1 Vetor de nós

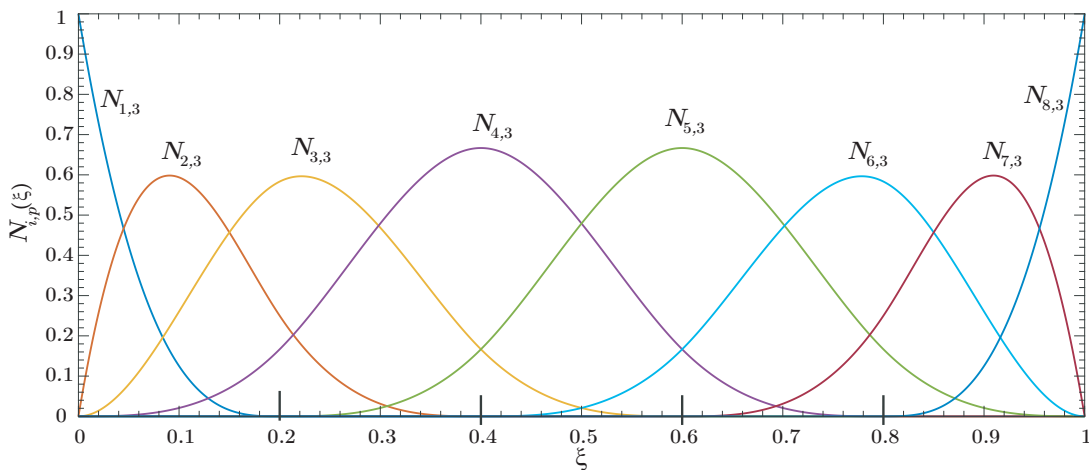
O espaço paramétrico é definido pelo chamado vetor de nós  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ . Este tem  $n + p + 1$  entradas, sendo  $n$  o número de pontos de controle e  $p$  o grau polinomial das funções de base B-Spline. Este é um conjunto de coordenadas paramétricas  $\xi_i \in \mathbb{R}$  numa ordem não decrescente,  $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ , o qual divide o espaço paramétrico em seções. Se todos os nós são igualmente espaçados, o vetor de nós é chamado uniforme. Uma função de base B-Spline é  $C^\infty$  contínua dentro de um intervalo de nós, isto é, entre dois nós distintos, e  $C^{p-1}$  continua num só nó. Um valor de nó pode aparecer mais de uma vez e então é chamado de nó múltiplo. Num nó de multiplicidade  $k$  a continuidade é  $C^{p-k}$ , isto é, aumentando a multiplicidade de um nó, a continuidade pode ser diminuída.



Se o primeiro e último nó tem a multiplicidade  $p + 1$ , o Vetor de Nós chama-se aberto, fixado ou não periódico (PIEGL; TILLER, 1997). Nesta dissertação, o termo “aberto” é usado. Numa B-Spline com um vetor de nós aberto o primeiro e último ponto de controle são interpoláveis e a curva é tangencial ao polígono de controle no início e ao final da curva como se pode observar na FIGURA 1, o que será explicado em mais detalhe. Já que para desenhar uma curva geralmente é necessário especificar seu ponto inicial e final, os vetores de nós abertos são padrão em CAD e são assumidos para o restante desta dissertação, a menos que seja indicado de outra forma.

### 3.1.2 Funções de base B-Spline

FIGURA 2 – Funções de base B-Spline cúbicas com vetor de nós aberto.



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

Baseado no vetor de nós e o grau polinomial, as funções de base B-Spline  $N_{i,p}(\xi)$  são calculadas pela fórmula recursiva de *Cox-deBoor* (PIEGL; TILLER, 1997). Este inicia para  $p = 0$  com:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Para  $p \geq 1$  é:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.2)$$

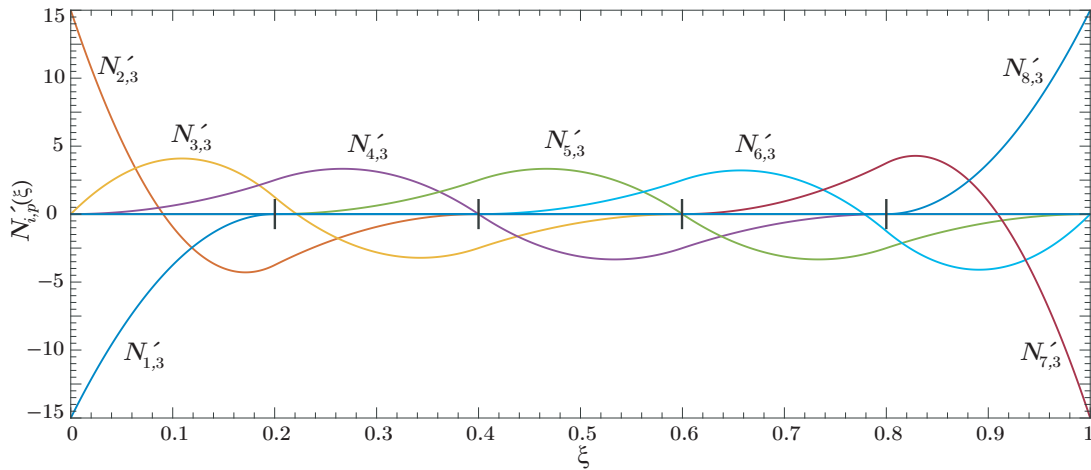
Desde esta formulação algumas importantes propriedades das funções de base B-Splines podem ser deduzidas:

- Suporte local, isto é, uma função de base  $N_{i,p}(\xi)$  não é zero somente no intervalo  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ .
- Sobre um intervalo de nós  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  há  $p + 1$  funções de base com valor diferente de zero.
- Partição da unidade, isto é,  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ .
- Não negatividade, isto é,  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ .
- Independência linear, isto é,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i N_{i,p}(\xi) = 0 \iff \alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

Na FIGURA 2 mostra-se um exemplo de funções de base B-Spline cúbicas com um vetor de nós aberto. Estas são as funções de base correspondentes à curva na FIGURA 1. As linhas verticais mais longas sobre o eixo  $\xi$  indicam a localização dos nós internos os quais dividem a curva em seções.

### 3.1.3 Derivada da função base B-Spline

FIGURA 3 – Derivadas das Funções de base B-Spline cúbicas com vetor de nós aberto.



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

A primeira derivada de uma função de base B-Spline é calculada pela seguinte fórmula:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.3)$$

Na FIGURA 3 mostram-se as primeiras derivadas das funções de base cúbicas da FIGURA 2.

O vetor de nós aberto tem os seguintes efeitos sobre as funções de base e suas derivadas:

Em  $\xi = 0$  todas as funções de base desaparecem exceto a primeira:

$$\begin{aligned} N_{1,p}(0) &= 1 \\ N_{i,p}(0) &= 0, \quad i \neq 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para as derivadas, somente as primeiras duas derivadas são diferentes de zero e  $N'_{1,p}(0) = -N'_{2,p}(0)$ , logo:

$$\begin{aligned} N'_{1,p}(0) &= -\frac{p}{\xi_{p+2}} \\ N'_{2,p}(0) &= \frac{p}{\xi_{p+2}} \\ N'_{i,p}(0) &= 0, \quad i > 2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

O mesmo aplica-se às funções básicas no final do espaço paramétrico, que podem ser vistas nas [FIGURA 2](#) e [FIGURA 3](#).

As derivadas de maior ordem podem ser obtidas pela diferenciação de ambos lados da Equação (3.3):

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (3.6)$$

Das Equações (3.3) e (3.6), podemos expressar as derivadas de maior ordem com  $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ :

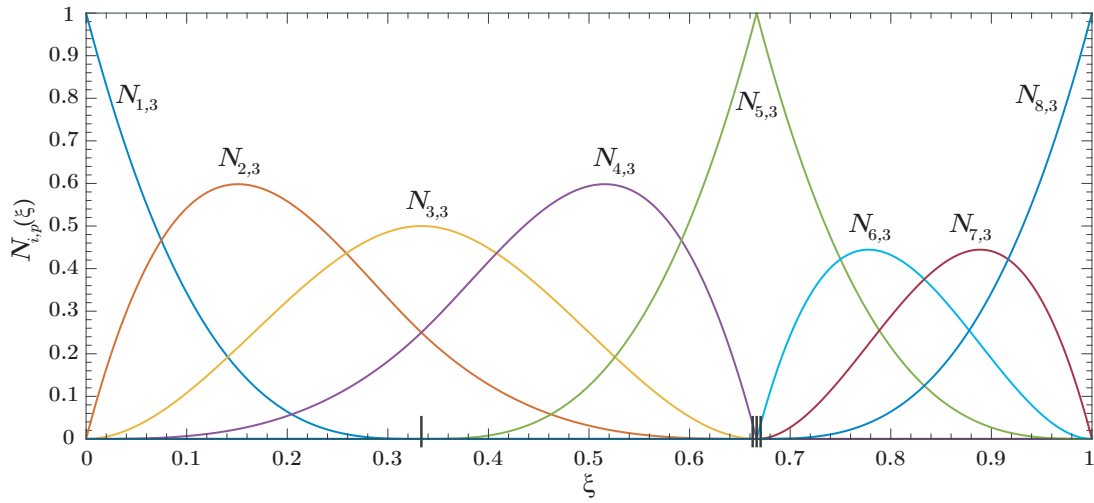
$$N_{i,p}^k(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}(\xi), \quad (3.7)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1 \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1 \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

O denominador de vários dos coeficientes das Equações (3.8) podem ser zero na presença de nós repetidos. Quando isso acontece, o coeficiente é definido como zero. Eficientes algoritmos para esses cálculos podem ser encontrados em [Piegl e Tiller \(1997\)](#).

FIGURA 4 – Funções de base B-Spline cúbicas com um nó interno com multiplicidade.



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1, 1]$ .

Como foi mencionado anteriormente, em nós com multiplicidade as funções de base sofrem uma redução da continuidade  $C^{p-k}$ , com  $k$  como a multiplicidade do nó. Se  $k = p$ , as funções de base são  $C^0$  contínuas neste nó. Nesse caso, todas as funções de base neste nó desaparecem, exceto uma que assume o valor de 1. Na FIGURA 4 mostram-se as funções de base cúbicas para um vetor de nós com um nó interno de multiplicidade  $k = p = 3$ .

### 3.1.4 Curvas B-Spline

Uma curva B-Spline de grau  $p$  é calculada pela combinação linear de pontos de controle e as respectivas funções de base:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad (3.9)$$

A primeira derivada da curva é obtida pela combinação linear dos pontos de controle e as derivadas das funções de base:

$$C'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi) P_i \quad (3.10)$$

Na FIGURA 1 uma curva B-Spline cúbica com vetor de nós aberto é dada. Como pode ser visto, o primeiro e último ponto de controle são interpoláveis e a curva é tangencial ao polígono de controle em seu início e final. Este é o efeito do vetor de

nós aberto o qual pode ser entendido pela inserção das Equações (3.4) e (3.5) nas Equações (3.9) e (3.10):

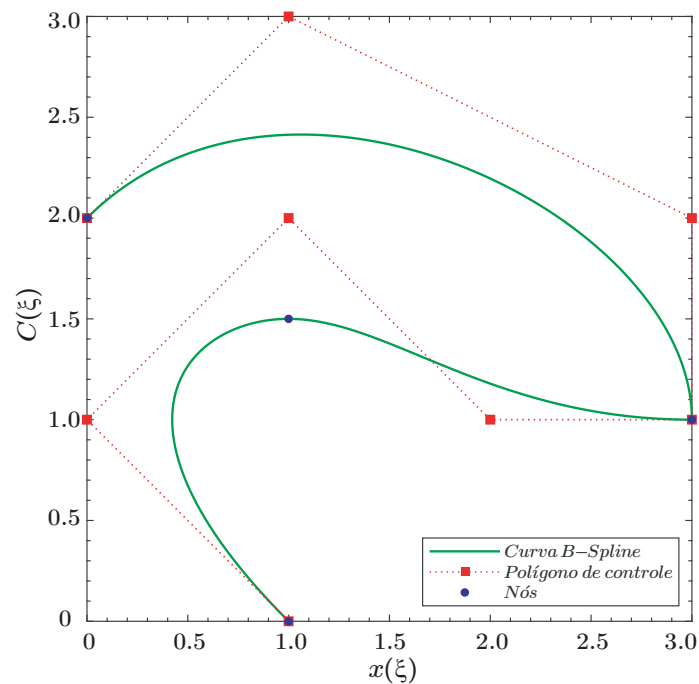
$$C(0) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(0) P_i = P_1 \quad (3.11)$$

$$C'(0) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(0) P_i = \frac{p}{\xi_{p+2}} (P_2 - P_1) \quad (3.12)$$

A Equação (3.11) mostra que para um vetor de nós aberto, o primeiro ponto de controle é interpolável em  $\xi = 0$ , enquanto a Equação (3.12) mostra que a curva é tangencial a  $\overline{P_1 P_2}$  em  $\xi = 0$ . O mesmo aplica-se para o outro extremo da curva, isto é, para  $\xi = 1$  e os respectivos pontos de controle. O entendimento dessas propriedades é muito importante para definir as condições de continuidade entre curvas B-Spline e para superfícies B-Spline, os quais serão tratados na seção 3.4.

Se um nó interno tem multiplicidade  $k = p$ , a continuidade neste ponto é reduzida para  $C^0$ , isto é, uma dobra pode ser inserida na curva. Como pode ser visto na FIGURA 4, uma função de base assume o valor de 1 neste ponto, o que significa que o ponto de controle correspondente é interpolável pela curva. A FIGURA 5 mostra uma curva B-Spline cúbica com um nó interno com multiplicidade de  $k = p$ . Para esta curva, as funções de base da FIGURA 4 foram aplicadas aos pontos de controle da FIGURA 1.

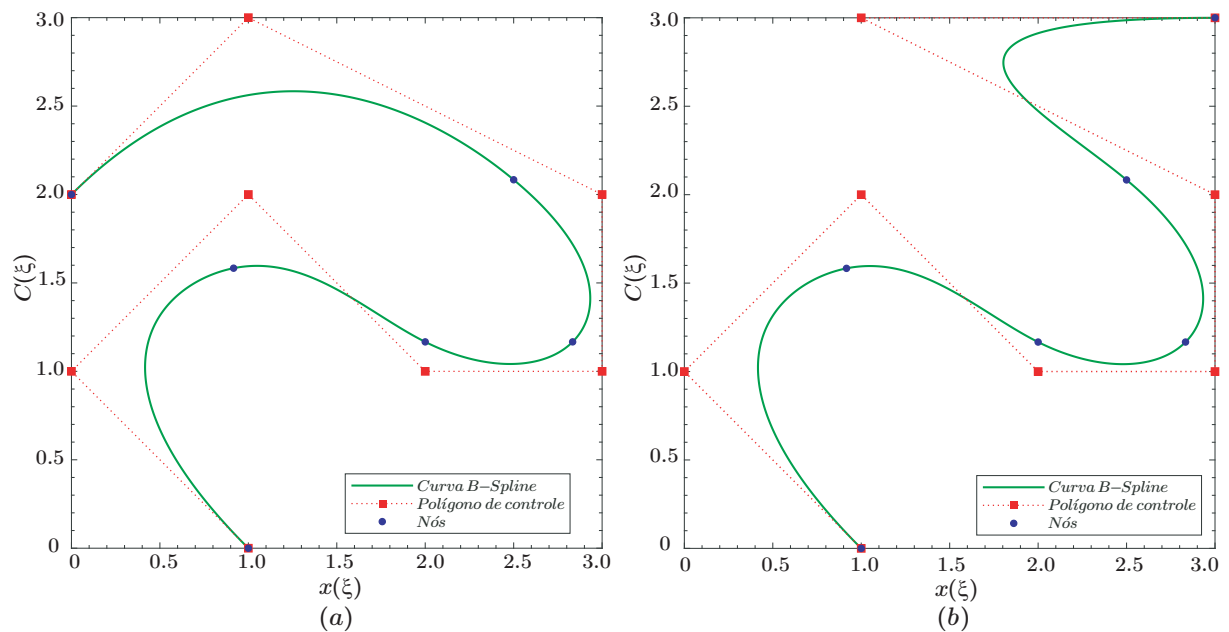
FIGURA 5 – Curva B-Spline cúbica com nó interno com multiplicidade.



Fonte: O autor.

Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1, 1]$ .

FIGURA 6 – Influência local dos pontos de controle sobre a curva B-Spline.



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

A propriedade de suporte local de B-Splines é ilustrada na FIGURA 6. Uma curva B-Spline é modificada pela mudança das coordenadas  $x$  e  $y$  do último ponto de controle. Como mostra a FIGURA 2, a correspondente função de base tem suporte somente no último intervalo de nós. Portanto, esta modificação tem efeito sobre a curva somente na última seção, o qual pode ser visto na FIGURA 6. Se um dos pontos de controle internos for modificado, este terá influência sobre algumas seções, no máximo em  $p + 1$  seções.

Propriedades importantes de curvas B-Spline são:

- Propriedade da envolvente convexa: A curva é contida dentro da envolvente convexa do polígono de controle.
- Em geral, os pontos de controle não são interpoláveis.
- Os pontos de controle tem influência em máximo  $p + 1$  seções.
- Para vetores de nós abertos, o primeiro e último ponto de controle são interpoláveis e a curva é tangencial ao polígono de controle no início e final da curva.
- A curva é  $C^\infty$  contínua entre dois nós e  $C^{p-k}$  contínua num nó de multiplicidade  $k$ .

- Transformações afins das curvas B-Spline são desenvolvidas pela transformação dos pontos de controle correspondentemente.

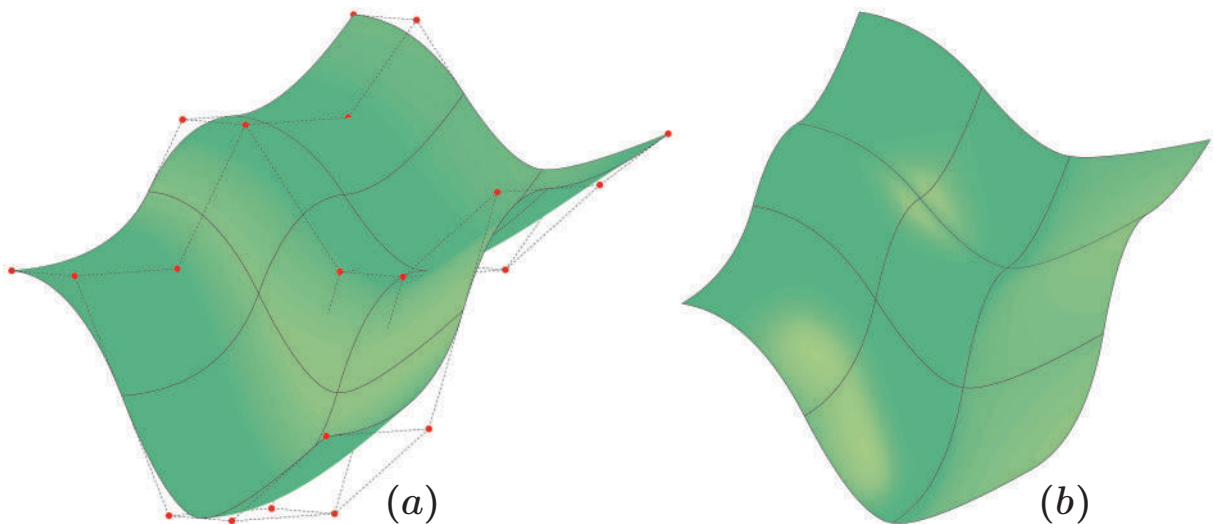
### 3.1.5 Superfícies B-Spline

Uma superfície B-Spline é calculada pelo produto tensorial das funções de base B-Spline em duas direções paramétricas  $\xi$  e  $\eta$ . Esta é definida por uma malha de  $n \times m$  pontos de controle  $P_{i,j}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ , dois Vetores de Nós  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$  e  $H = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$ , dois graus polinomiais  $p$  e  $q$  (Os quais não necessariamente são iguais), e as correspondentes funções de base  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,q}(\eta)$ . É descrita como:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (3.13)$$

Na FIGURA 7 mostra-se um exemplo de uma superfície B-Spline quadrática e sua malha de controle (linhas pontilhadas). As iso-curvas na superfície marcam os nós que dividem a superfície em elementos. Vetores de nós abertos são empregados em ambas direções. Portanto, as bordas da superfície são definidas apenas pelos pontos de controle na borda e os vértices da superfície são interpoláveis. Analogamente às curvas, as inclinações ao longo de uma borda são definidas pelas duas primeiras filas de pontos de controle a partir da borda.

FIGURA 7 – Superfície B-Spline.



Fonte: O autor.

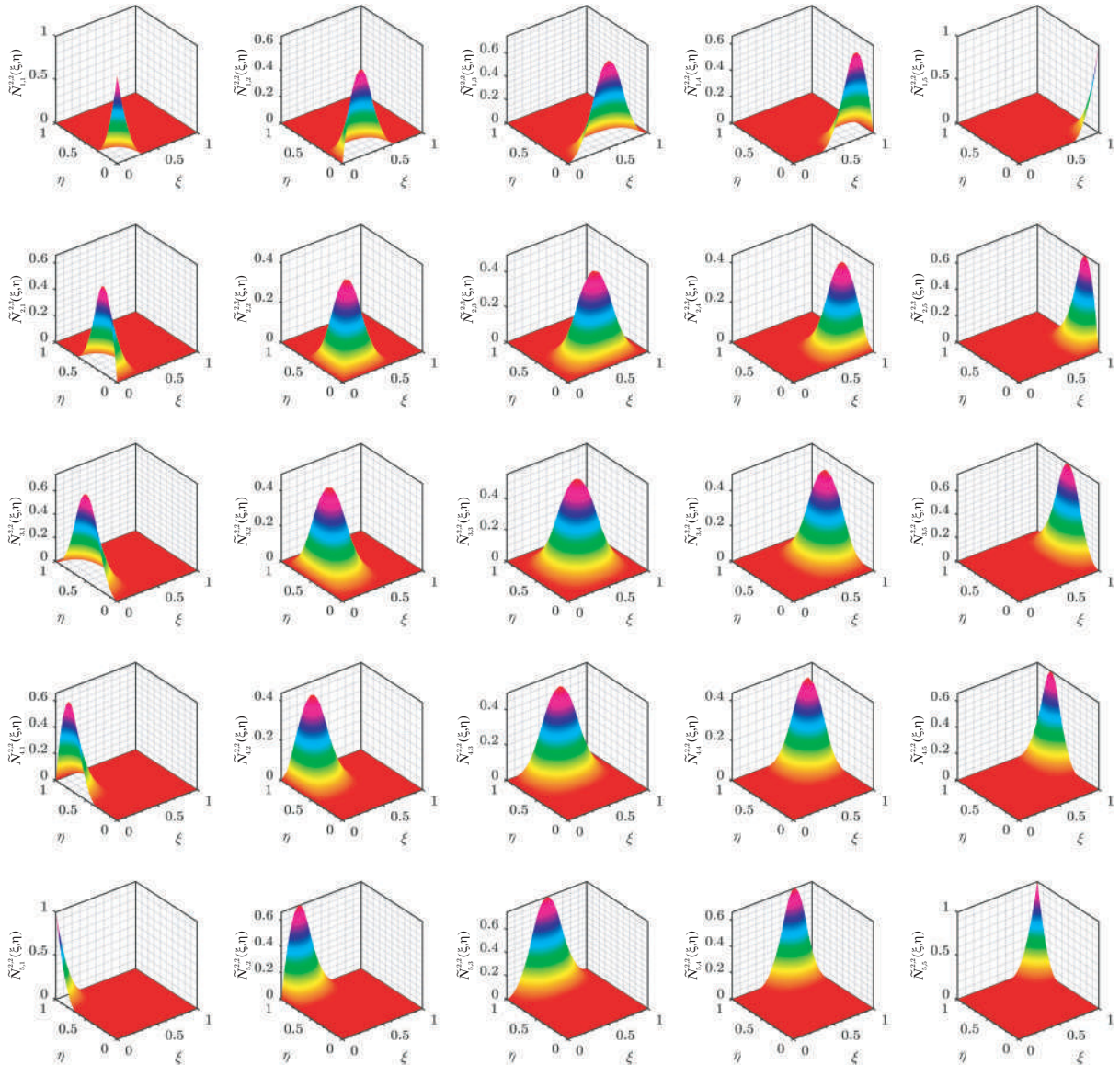
Nota: Para  $p = q = 2$  e vetores de nós abertos  $\Xi = H = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1]$ .

Legenda: (a) Com malha de controle e elementos. (b) Só elementos.



O suporte local das funções de base B-Spline bidimensionais  $\tilde{N}_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$  é encontrado diretamente das funções de base B-Spline unidimensionais das quais está formada. Assim o suporte local fica definido como  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ . Na FIGURA 8 mostram-se todas as funções de base B-Spline bidimensionais da superfície B-Spline da FIGURA 7.

FIGURA 8 – Funções de base B-Spline bidimensionais.



Fonte: O autor.

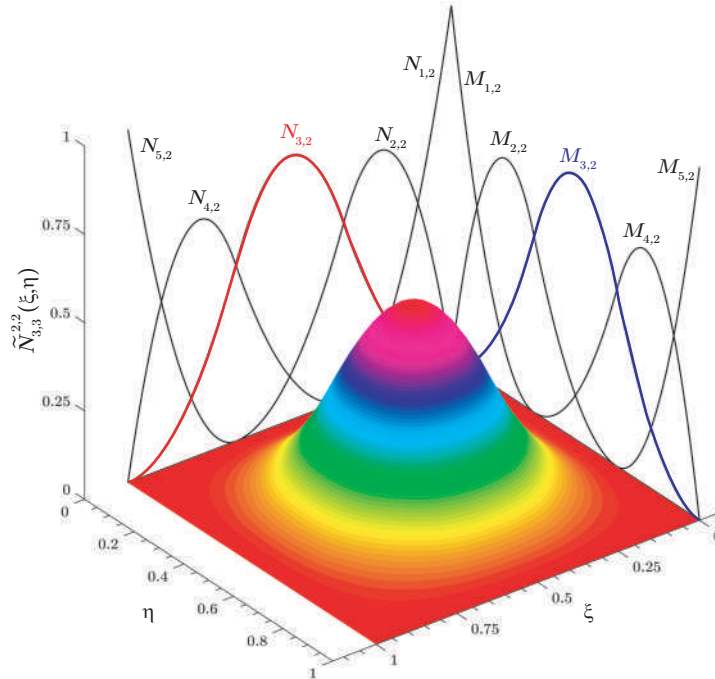
Nota: Para  $p = q = 2$  e vetores de nós abertos  $\Xi = H = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1]$ .

Com a finalidade de deixar mais clara a geração das funções de base B-Spline bidimensionais, apresenta-se um destaque da função de base  $\tilde{N}_{3,3}^{2,2}(\xi, \eta)$  da FIGURA 8,



a mesma que é mostrada na FIGURA 9, que é resultado do produto tensorial das funções de base B-Spline unidimensionais  $N_{3,2}(\xi)$  e  $M_{3,2}(\eta)$ .

FIGURA 9 – Função de base B-Spline bidimensional  $\tilde{N}_{3,3}^{2,2}(\xi, \eta)$ .



Fonte: O autor.

Nota: Para  $p = q = 2$  e vetores de nós abertos

$$\Xi = H = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1].$$

Legenda:  $\tilde{N}_{3,3}^{2,2}(\xi, \eta) = N_{3,2}(\xi)M_{3,2}(\eta)$

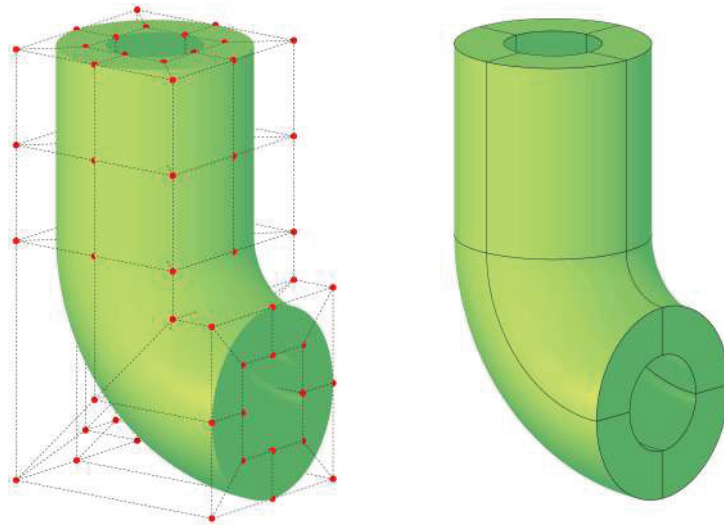
### 3.1.6 Sólidos B-Spline

Similar a superfícies B-Spline, os sólidos B-Spline são obtidos pelo produto tensorial de funções de base B-Spline em três dimensões paramétricas  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , dada uma treliça de controle  $P_{i,j,k}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $k = 1, 2, \dots, l$ , três graus polinomiais  $p, q$  e  $r$  (Os quais não necessariamente são iguais) e os vetores de nós  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ ,  $H = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$  e  $Z = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l+r+1}]$ . Um sólido B-Spline é definido pela seguinte equação:

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) P_{i,j,k} \quad (3.14)$$

Na FIGURA 10 mostra-se um exemplo de um sólido B-Spline e sua treliça de controle. As iso-superfícies no sólido marcam os nós que dividem o sólido em elementos. Como

FIGURA 10 – Sólido B-Spline.



Fonte: Adaptado de Hughes, Bazilevs e Cottrell (2009).

esta dissertação se concentra em estruturas de superfície, os sólidos de B-Spline não são considerados mais detalhadamente aqui.

## 3.2 NURBS

“NURBS” é uma abreviação para *Non-Uniform Rational B-Spline*. O termo “non uniform (não uniforme)” refere-se ao vetor de nós o qual em geral é não uniforme. O termo “rational (racional)” refere-se às funções de base. Enquanto para B-Splines, as funções de base são polinômios por partes, para NURBS eles são polinômios racionais por partes.

### 3.2.1 Transformação projetiva

Do ponto de vista geométrico uma entidade NURBS em  $\mathbb{R}^d$  é obtida por meio da transformação projetiva de uma entidade B-Spline em  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Isto permite, por exemplo, que círculos e elipses sejam exatamente construídos a partir destas transformações projetivas.

Os pontos de controle no espaço  $\mathbb{R}^d$  são obtidos pela projeção dos pontos de controle em  $\mathbb{R}^{d+1}$ , dado pelas Equações (3.15) e (3.16):

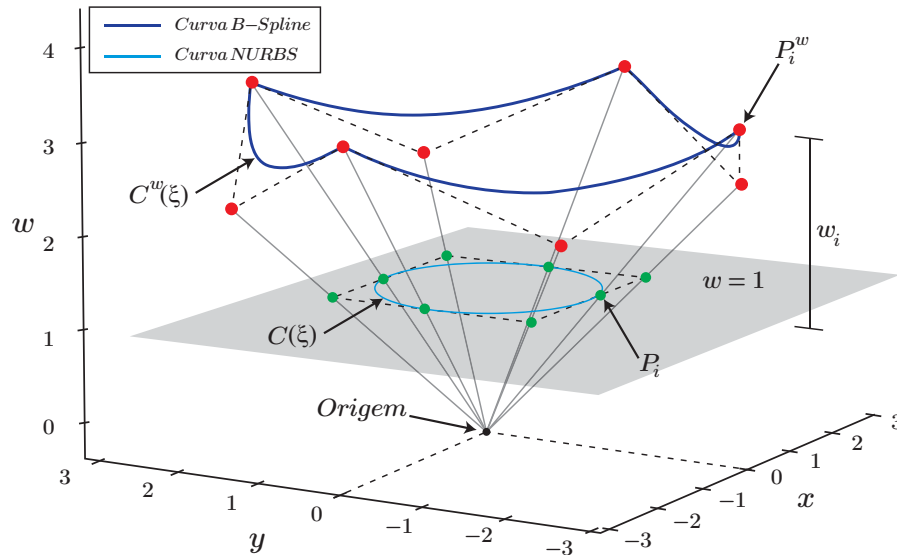
$$(\mathbf{P}_i)_j = \frac{(\mathbf{P}_i^w)_j}{w_i}, \quad j = 1, \dots, d \quad (3.15)$$

$$w_i = (\mathbf{P}_i^w)_{d+1} \quad (3.16)$$

Sendo  $(\mathbf{P}_i)_j$  a  $j$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{P}_i$ , e  $w_i$  o  $i$ -ésimo peso.

Na FIGURA 11 mostra-se um exemplo da transformação projetiva, com a transformação de uma curva B-Spline  $C^w(\xi)$  em  $\mathbb{R}^3$  para uma curva NURBS  $C(\xi)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

FIGURA 11 – Transformação projetiva de uma curva B-Spline em  $\mathbb{R}^3$ , numa curva NURBS (circulo) em  $\mathbb{R}^2$ .



Fonte: Adaptado de Hughes, Bazilevs e Cottrell (2009), Cadena (2017) e GUO (2016).

### 3.2.2 Funções de base NURBS

Para manipular de um jeito mais direto a geração de espaços NURBS faz-se uso de uma perspectiva algébrica, e para isso, é necessário definir uma *função de ponderação*, que é uma função polinomial escalar por partes:

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i \quad (3.17)$$

Agora emprega-se a Equação (3.17) para diretamente construir uma base para o espaço NURBS. Então uma base NURBS unidimensional pode ser definida pela função *racional* dada pela expressão (3.18):

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} \quad (3.18)$$

Substituindo-se a Equação (3.17) na equação (3.18) ficam definidas as funções de base NURBS unidimensionais como:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} \quad (3.19)$$

Para o caso bidimensional as funções de base são:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad (3.20)$$

E para o caso tridimensional as funções de base são:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \quad (3.21)$$

### 3.2.3 Derivada da função base NURBS

Como as funções de base NURBS são construídas a partir das funções de base B-Spline, a derivada das funções racionais claramente também dependerá das derivadas de suas contrapartes não racionais. Assim aplicando a regra do quociente na Equação (3.19), tem-se:

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (3.22)$$

Sendo  $N'_{i,p}(\xi)$  a representação de  $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$ , e  $W'(\xi)$  dado pela expressão:

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N'_{\hat{i},p} w_{\hat{i}} \quad (3.23)$$

Para derivadas de ordem superior das funções de base NURBS tem-se a Equação (3.26), mas primeiramente simplifica-se a notação definindo:

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi), \quad (\text{não soma em } i) \quad (3.24)$$

Onde não se soma no índice repetido, assim também tem-se:

$$W^{(k)}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k} W(\xi) \quad (3.25)$$

Assim as derivadas de alta ordem das funções racionais ficam expressadas em termos de derivadas de baixa ordem:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_i^p(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_i^p(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.26)$$

Onde

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (3.27)$$

Para o caso da função  $R_{i,j}^{p,q}$  tem-se as derivadas parciais definidas da seguinte maneira, primeiro para a direção  $\xi$ :

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} M_{j,q} \frac{W(\xi, \eta) N'_{i,p}(\xi) - W(\xi, \eta)_{,\xi} N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (3.28)$$

sendo  $N'_{i,p}(\xi)$  a representação de  $\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$ , e  $W(\xi, \eta)_{,\xi}$  dado pela expressão:

$$W(\xi, \eta)_{,\xi} = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \quad (3.29)$$

E a derivada para a direção  $\eta$ :

$$\frac{d}{d\eta} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = w_{i,j} N_{j,q} \frac{W(\xi, \eta) M'_{j,q}(\eta) - W(\xi, \eta)_{,\eta} M_{j,q}(\eta)}{(W(\xi, \eta))^2} \quad (3.30)$$

sendo  $M'_{j,q}(\eta)$  a representação de  $\frac{d}{d\eta} M_{j,q}(\eta)$ , e  $W(\xi, \eta)_{,\eta}$  dado pela expressão:

$$W(\xi, \eta)_{,\eta} = \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \quad (3.31)$$

### 3.2.4 Curva NURBS

Para uma curva NURBS, como se mostrou anteriormente na seção 3.2.1, cada ponto de controle tem adicionalmente às suas coordenadas um peso individual  $w_i$ . Tal ponto  $P_i(x_i, y_i, z_i, w_i)$  pode ser representado com coordenadas homogêneas  $P_i^w(w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$  num espaço projetado  $\mathbb{R}^4$ . Uma curva NURBS é a projeção de uma B-Spline em  $\mathbb{R}^4$  com pontos de controle homogêneos em  $\mathbb{R}^3$  (PIEGL; TILLER, 1997).

Pode-se escrever uma curva NURBS no modo comum como a soma dos pontos de controle vezes as respectivas funções de base:

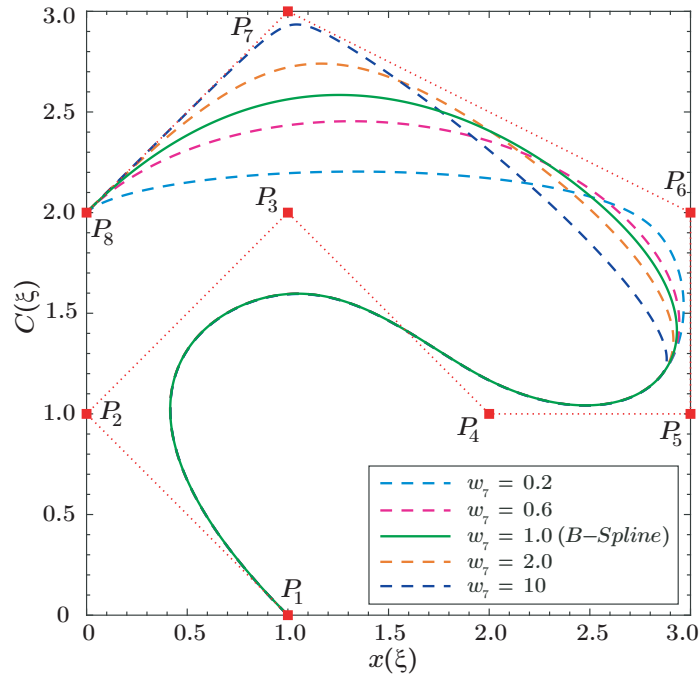
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) P_i \quad (3.32)$$

Se todos os pesos de controle forem iguais, as funções racionais na Equação (3.19) serão reduzidas às funções normais de B-Spline. Isso significa que um B-Spline é um caso especial de NURBS com pesos de controle iguais, e todas as propriedades de B-Splines listadas na seção 3.1.4 também se aplicam a NURBS.

Na FIGURA 12, várias curvas NURBS cúbicas são definidas através dos pontos de controle do exemplo da FIGURA 1, com uma ponderação variável no ponto de controle superior para os seguintes valores  $w_7 = 0.2$ ,  $w_7 = 0.6$ ,  $w_7 = 1.0$ ,  $w_7 = 2.0$  e

$w_7 = 10$ . Pode-se ver que, devido a um valor de ordem mais alto no peso de controle, a curva é “*pullada*” em direção a este ponto de controle e um valor de peso de controle de ordem mais baixo, “*afasta*” a curva do ponto de controle. Na FIGURA 13 pode-se ver a influência da variação do peso de controle  $w_7$  sobre as funções de base NURBS.

FIGURA 12 – Curva NURBS com ponderação variável no ponto de controle superior  $P_7$ .



Fonte: O autor.

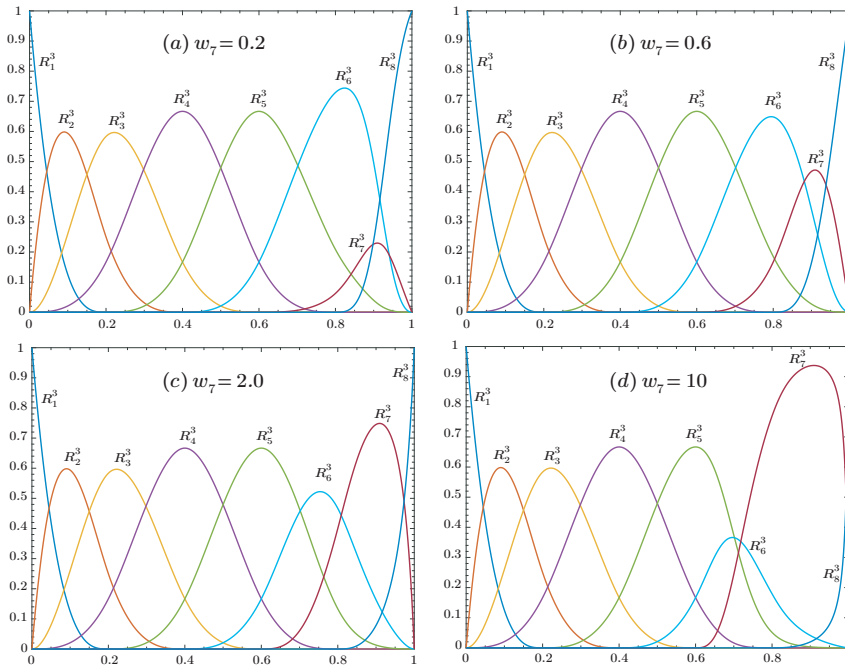
Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

Como já se mencionou anteriormente a vantagem significativa das funções de base racionais é que elas permitem uma representação exata das seções cônicas, o que inclui círculos e elipses. A FIGURA 14 mostra um círculo representado por uma curva NURBS. Portanto, as NURBS são capazes de representar formas livres suaves, formas lineares, bordas afiadas e dobras, também objetos geométricos importantes como esferas, cilindros, etc. É por isso que as NURBS se estabeleceram como um padrão na modelagem CAD.

### 3.2.5 Superfície NURBS

Assim como as curvas, as superfícies NURBS são obtidas pela combinação linear das funções racionais da Equação (3.20) com os pontos de controle  $P_{i,j}$  e são

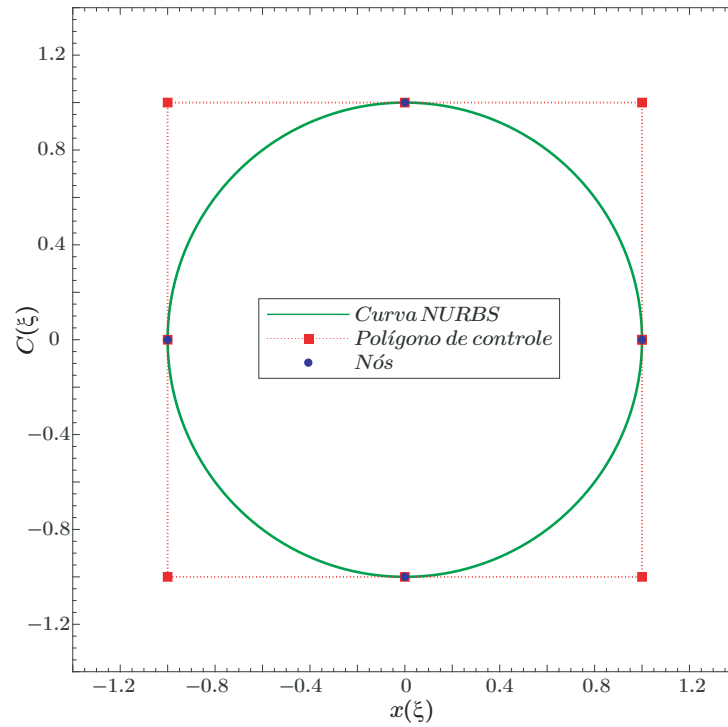
FIGURA 13 – Variação das funções de base NURBS com uma ponderação variável no ponto de controle  $P_7$ .



Fonte: O autor.

Para  $p = 3$  e um vetor de nós aberto  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1]$ .

FIGURA 14 – Círculo exato representado por uma curva NURBS.



Fonte: O autor.

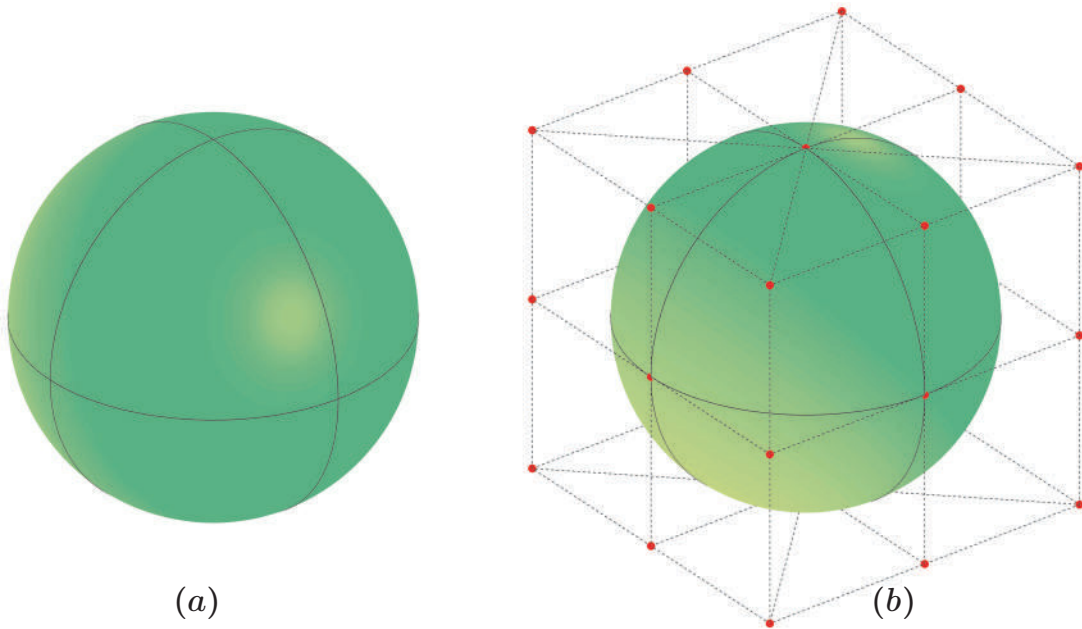
obtidas pela seguinte Equação (3.33):

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (3.33)$$

É importante notar que as funções de base NURBS bidimensionais, Equação (3.20), não são um produto tensorial de funções de base NURBS unidimensionais (3.19). Elas são obtidas como a razão ponderada do produto tensorial de funções de base B-Spline.

Na FIGURA 15(a) é representada uma esfera a qual é modelada por uma superfície NURBS. E na FIGURA 15(b) mostra-se a geometria e pontos de controle da esfera NURBS.

FIGURA 15 – Superfície NURBS de uma esfera.



Fonte: O autor.

Nota: Representação exata de uma esfera mediante uma superfície NURBS.

(a) Superfície. (b) Superfície e malha de controle.

### 3.2.6 Sólido NURBS

Um sólido NURBS é obtido como a combinação linear das funções racionais da Equação (3.21) com os pontos de controle  $P_{i,j,k}$ , assim mesmo as funções racionais são entendidas como a razão ponderada do triplo produto tensorial das funções de base B-Spline. Um sólido NURBS é definido pela Equação (3.34):

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) P_{i,j,k} \quad (3.34)$$



### 3.3 REFINAMENTO DE B-SPLINES E NURBS

Uma propriedade interessante dos objetos B-Spline é que o refinamento da base não altera a geometria B-Spline correspondente e sua parametrização. Os três métodos típicos de refinamento de B-Spline incluem: *Inserção de nós*, *elevação de ordem* e *o refinamento- $k$* , neste último preserva-se uma alta ordem e uma alta continuidade. O refinamento de uma base NURBS envolve o refinamento das funções B-Spline no espaço homogêneo  $\mathbb{R}^{d+1}$  seguido pela projeção para o espaço racional  $\mathbb{R}^d$ . A seguir, os três tipos de técnicas de refinamento acima mencionadas são introduzidas brevemente e as propriedades básicas são discutidas.

#### 3.3.1 Inserção de nós

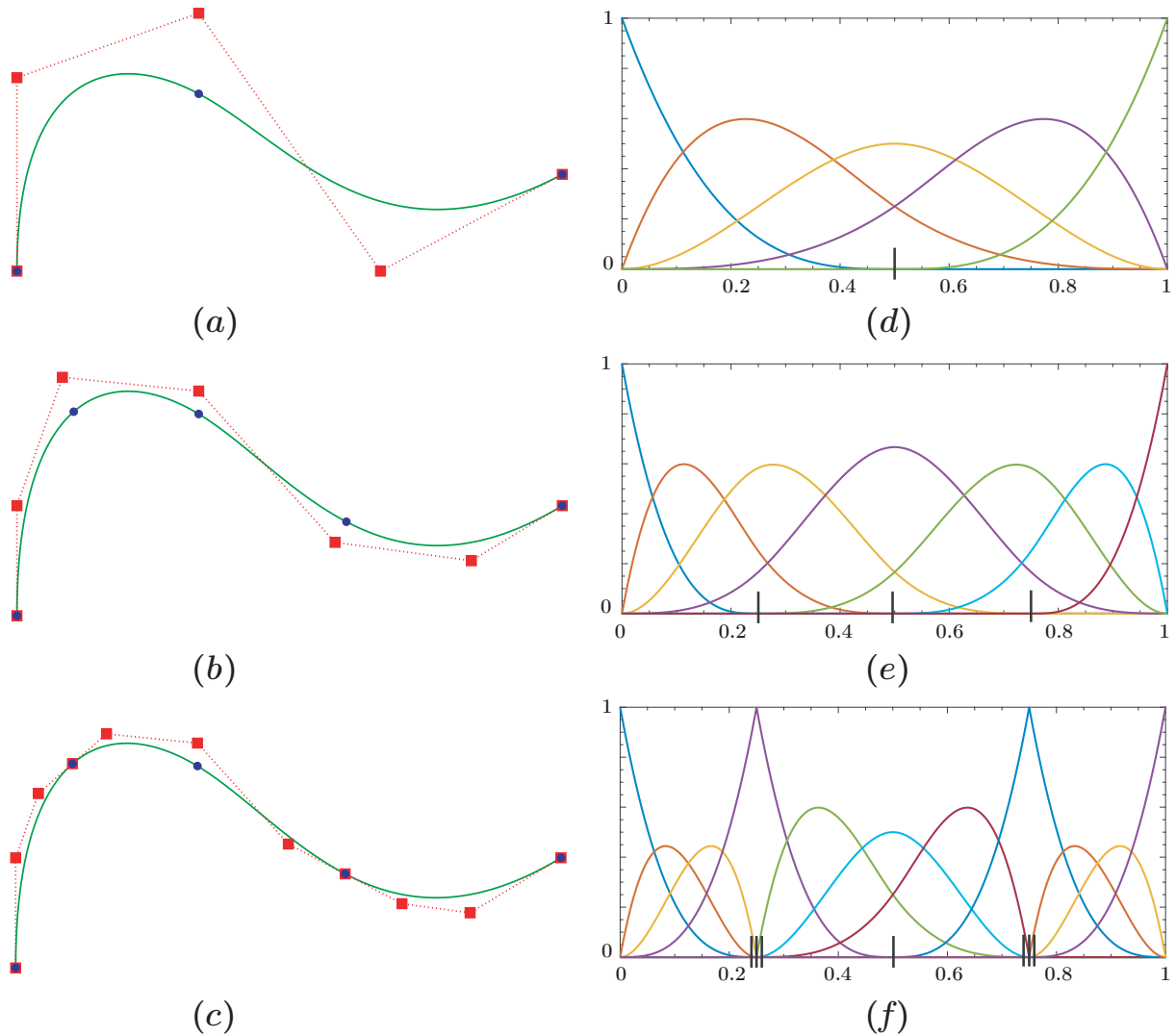
A inserção de nós, como seu nome sugere, é um procedimento que adiciona um ou mais nós ao vetor de nós original  $\Xi$  para gerar um vetor de nós refinado  $\bar{\Xi}$ . A base B-Spline refinada é gerada com base no novo vetor de nós  $\bar{\Xi}$ . O novo conjunto de pontos de controle é uma combinação linear do conjunto original de pontos de controle. Um algoritmo detalhado pode ser encontrado em [Piegl e Tiller \(1997\)](#).

Um exemplo de inserção de nós de uma curva B-Spline é ilustrado na [FIGURA 16](#). Primeiramente, dois nós  $\xi_i = 0.25, 0.75$  são inseridos no vetor de nós original  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$ , [FIGURA 16\(b\)](#) e [\(e\)](#). Neste caso, a continuidade da base nos nós inseridos permanece em  $C^{p-1}$ , onde  $p = 3$  é o grau das funções de base B-Spline. Em segundo lugar, repetimos o passo anterior duas vezes até que a multiplicidade dos nós inseridos seja  $p$ , o que reduz a continuidade da base nas posições inseridas à continuidade  $C^0$ . Com o aumento da multiplicidade dos nós inseridos, a continuidade da base nesses nós diminui. Se a multiplicidade do nó é  $q$ , então a continuidade é  $C^{p-q}$ . Existem algumas semelhanças entre a inserção de nós e o *refinamento- $h$*  do MEF, porém, o refinamento- $h$  produz uma continuidade  $C^0$  através dos contornos dos elementos, o qual é um caso especial da inserção de nós.

#### 3.3.2 Elevação de ordem

Em contraste com a inserção de nós, outra possibilidade para enriquecer as funções de base é aumentar a ordem da base. Os procedimentos básicos para a elevação de ordem consistem em três etapas. Primeiro, a multiplicidade de cada nó interior é elevada para a ordem de base  $p$ , que divide a curva B-Spline original em segmentos de *curvas de Bézier* ([PIEGL; TILLER, 1997](#)). Segundo, a ordem de cada curva de Bézier é elevada. Terceiro, a multiplicidade dos nós interiores repetidos é removida ou reduzida para manter a continuidade através dos contornos dos elementos

FIGURA 16 – Inserção de nós numa curva B-Spline.



Fonte: Adaptado de [GUO \(2016\)](#).

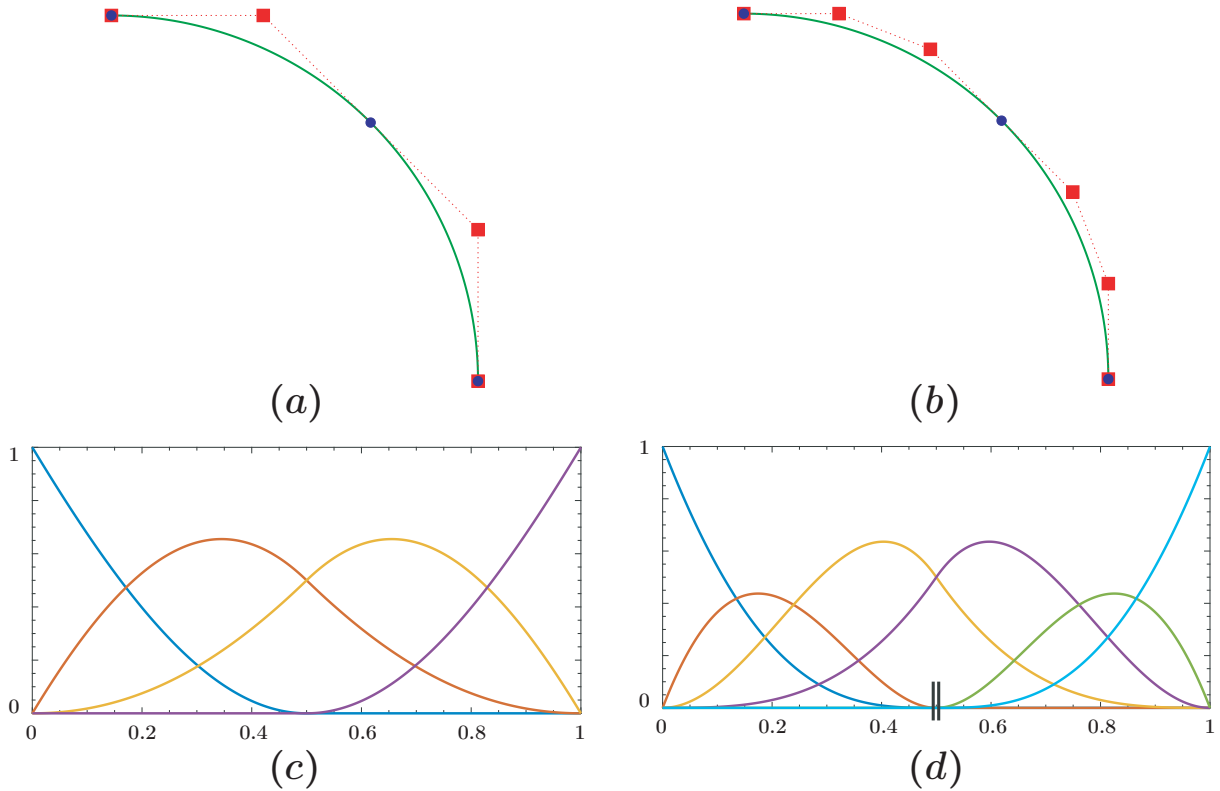
Nota: (a) Geometria original e seu polígono de controle, (b)-(c) geometrias e polígonos de controle refinados, (d) funções de base originais com vetor de nós  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$ , (e)-(f) funções de base refinadas com vetores de nós  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1]$  e  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 1, 1, 1, 1]$ .

inalterada, de modo que a geometria final seja uma única curva de ordem elevada e unificada. O algoritmo detalhado para a elevação de ordem pode ser encontrado em [Piegl e Tiller \(1997\)](#).

Um exemplo de elevação de ordem é mostrado na [FIGURA 17](#), onde a base quadrática original é elevada para cúbica e o nó interno é repetido uma vez para manter a continuidade da base. A elevação de ordem é até certo ponto semelhante ao *refinamento-p* no MEF. A diferença entre os dois esquemas é a continuidade entre elementos no estado inicial antes do refinamento, o qual é de continuidade  $C^0$  para o

*refinamento- $p$*  e para o caso da elevação de ordem é qualquer nível de continuidade menor que  $p - 1$ .

FIGURA 17 – Elevação de ordem de uma curva NURBS.



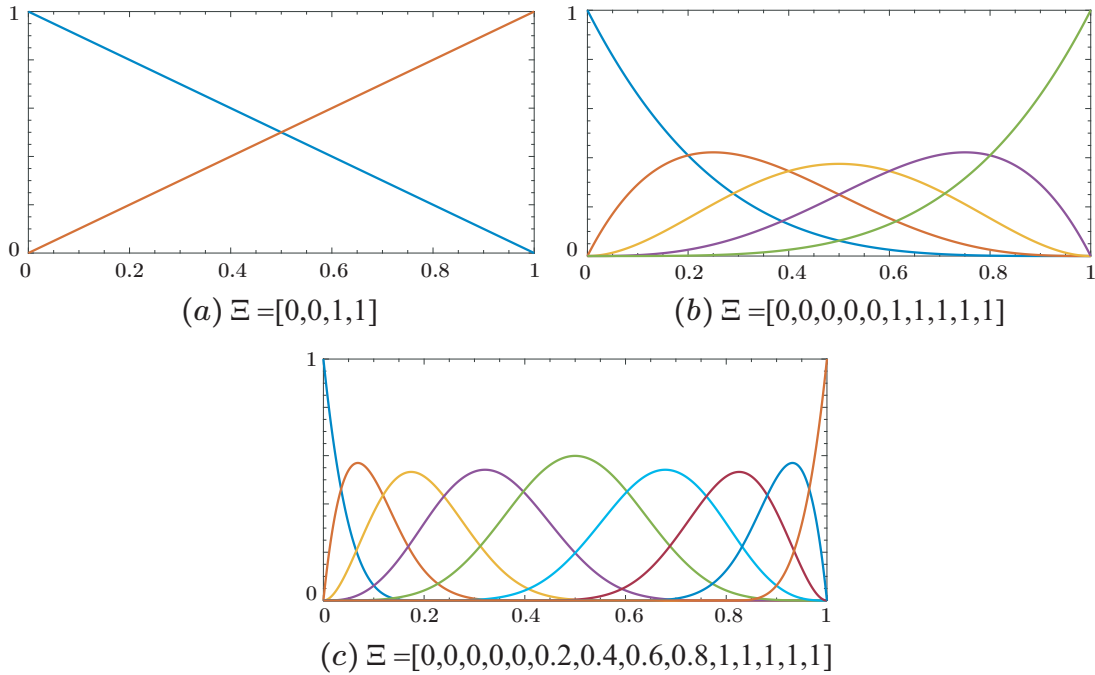
Fonte: Adaptado de [GUO \(2016\)](#).

Nota: (a) Geometria original e seu polígono de controle, (b) geometria e polígono de controle depois da elevação de ordem, (c) funções de base originais com vetor de nós  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ , (d) funções de base depois da elevação de ordem com vetores de nós  $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1]$ .

### 3.3.3 Refinamento $k$

A combinação da inserção de nós e a elevação da ordem resulta numa técnica de refinamento única de uma alta ordem e de uma alta continuidade, chamada *refinamento  $k$* . Usualmente, a ordem da malha grossa original é elevada a um grau mais alto, seguida pela inserção de nós para criar vários intervalos de nós. Aqui, a multiplicidade de cada nó é configurada para ser 1 com a finalidade de manter a continuidade mais alta, que é  $C^{p-1}$ , através dos contornos do elemento. Pode-se também duplicar os nós inseridos para diminuir a continuidade da base nas interfaces do elemento onde seja necessário. Note que cada nó inserido gerará mais uma função de base. Um exemplo simples de *refinamento  $k$*  da base B-Spline é mostrado na [FIGURA 18](#).

FIGURA 18 – Refinamento k de funções de base B-Spline.



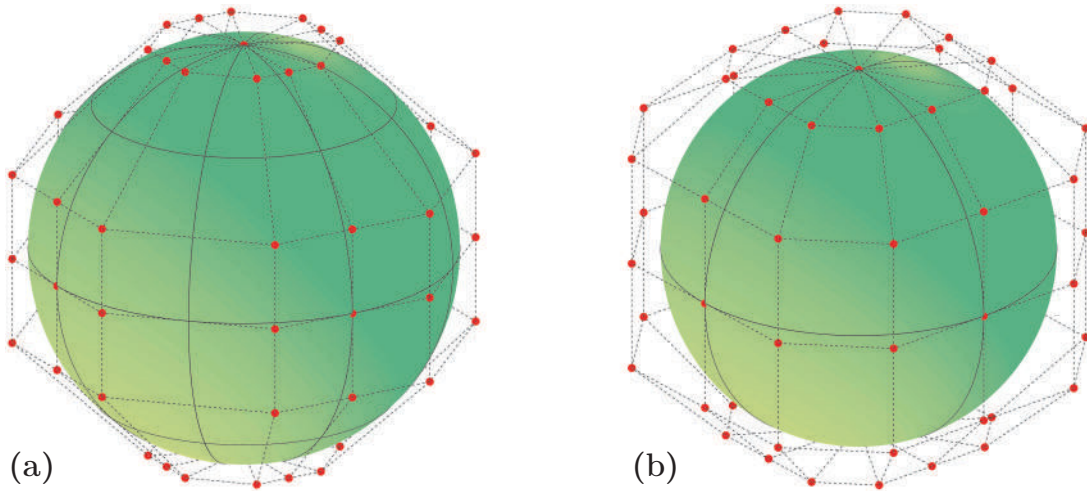
Fonte: Adaptado de [GUO \(2016\)](#).

Nota: (a) Funções de base lineares originais, (b) funções de base B-Spline de grau  $p = 4$ , (c) Inserção de nós em  $\xi = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ .

Para superfícies B-Spline, os procedimentos de refinamento mencionados anteriormente podem ser aplicados independentemente a cada uma das direções paramétricas  $\xi$  e  $\eta$ , e do mesmo jeito que em curvas B-Spline estes métodos de refinamento não mudam a geometria ou a parametrização. Para superfícies NURBS os mesmos procedimentos podem ser usados, porém, eles têm que ser aplicados às coordenadas de controle homogêneas  $P_i^w$ , o que significa refinar as B-Splines no espaço projetivo  $\mathbb{R}^4$ . Depois de obter os pontos de controle refinados no espaço projetivo, eles são projetados de novo ao espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Na [FIGURA 19\(a\)](#), mostra-se a esfera da [FIGURA 15](#) depois de um refinamento por inserção de nós, então são refinadas a malha de nós e a malha de controle. Na [FIGURA 19\(b\)](#) foi desenvolvido um refinamento por elevação de ordem. A malha de controle é refinada, enquanto o número de intervalos de nós permanece sem modificação.

FIGURA 19 – Refinamento por inserção de nós e elevação de ordem de uma superfície NURBS.



Fonte: O autor.

Nota: (a) Inserção de nós, para  $\xi_i = 0.125, 0.375, 0.625, 0.875$  e para  $\eta_i = 0.25, 0.75$ , (b) Elevação de ordem de  $p = 2$  a  $p = 3$ .

### 3.4 CONTINUIDADE

Para a formulação Isogeométrica de cascas apresentada no Capítulo 5, a continuidade entre elementos e patches desempenha um papel crucial. Portanto, nesta seção, as condições de continuidade para B-Splines e NURBS são discutidas.

Para curvas e superfícies paramétricas há dois tipos de continuidade, a continuidade geométrica  $G^k$  chamada também continuidade física, e a continuidade paramétrica  $C^k$  chamada também continuidade matemática (KIENDL, 2011)(ROGERS, 2001). Para uma continuidade de ordem zero eles são iguais  $G^0 = C^0$ , mas para um grau de continuidade  $k \geq 1$  eles precisam ser distinguidos. Geralmente a continuidade paramétrica  $C^k$  implica a continuidade geométrica  $G^k$ , mas não vice-versa. Para a Análise Isogeométrica de cascas, a continuidade geométrica  $G^1$  entre superfícies é necessária, então a diferença entre  $G^1$  e  $C^1$  é discutida brevemente.

#### 3.4.1 Continuidade paramétrica v.s. continuidade geométrica

Dadas duas curvas  $C^1(\xi)$  e  $C^2(\xi)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ , as quais juntam-se em seus extremos:

$$C^1(1) = C^2(0) \quad (3.35)$$

As curvas são  $C^1$  contínuas se suas primeiras derivadas na união são iguais:

$$\frac{\partial C^1(1)}{\partial \xi} = \frac{\partial C^2(0)}{\partial \xi} \quad (3.36)$$

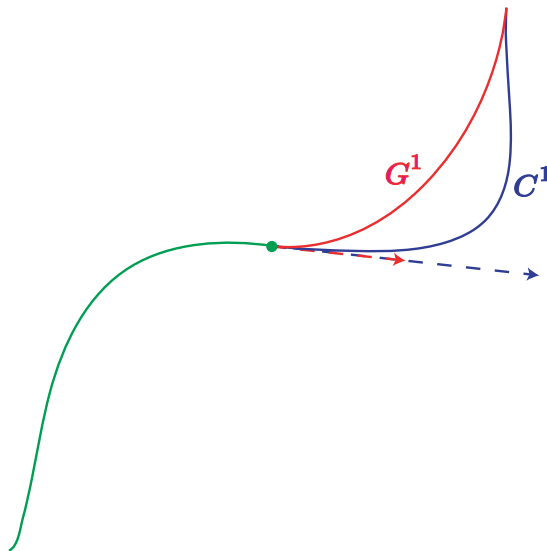
Isto significa que seus vetores tangentes na união são paralelos e tem a mesma magnitude. Para continuidade  $G^1$ , os vetores tangentes somente tem que ser paralelos mas não necessariamente da mesma magnitude (ROGERS, 2001). Então para  $G^1$  a seguinte equação deve ser mantida:

$$\frac{\partial C^1(1)}{\partial \xi} = c \cdot \frac{\partial C^2(0)}{\partial \xi} \quad (3.37)$$

Onde  $c$  é um multiplicador escalar.

Na FIGURA 20 ilustra-se a diferença entre continuidade paramétrica e geométrica. Os vetores com linha pontilhada indicam a magnitude dos vetores tangentes ao nó. O vetor tangente no final da curva da esquerda (verde) é igual em magnitude ao vetor mais longo (azul) mostrado para o segmento de curva da direita. Então, a curva etiquetada com  $C^1$  tem continuidade paramétrica, devido a que tanto a inclinação e magnitude dos vetores tangentes onde os segmentos de curva juntam-se são iguais. A magnitude do vetor tangente para a curva etiquetada com  $G^1$  (vermelho) é a metade do vetor da curva etiquetada com  $C^1$  (azul). Note a significativa diferença na forma das curvas, uma continuidade  $C^1$  dá uma transição mais suave entre segmentos de curva que uma continuidade  $G^1$ .

FIGURA 20 – Diferença entre continuidade paramétrica  $C^1$  e continuidade geométrica  $G^1$ .



Fonte: Adaptado de Rogers (2001).

### 3.4.2 Continuidade $G^1$ para curvas B-Spline

As primeiras derivadas no pontos extremos de uma curva B-Spline são dadas pela Equação (3.12):

$$\frac{\partial C(0)}{\partial \xi} = \frac{p}{\xi_{p+2}} (P_2 - P_1) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial C(1)}{\partial \xi} = \frac{p}{1 - \xi_n} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) \quad (3.39)$$

Os fatores  $\frac{p}{\xi_{p+2}}$  e  $\frac{p}{1 - \xi_n}$  são multiplicadores escalares dos vetores tangentes e portanto irrelevantes para a continuidade geométrica. O último ponto de controle da primeira curva é igual ao primeiro ponto de controle da segunda curva,  $\mathbf{P}_n^1 = \mathbf{P}_1^2$ , então as curvas são  $G^1$  contínuas se a seguinte condição é mantida:

$$(\mathbf{P}_2^2 - \mathbf{P}_n^1) = c \cdot (\mathbf{P}_n^1 - \mathbf{P}_{n-1}^1) \quad (3.40)$$

Isto significa que os pontos de controle  $\mathbf{P}_{n-1}^1$ ,  $\mathbf{P}_n^1$  e  $\mathbf{P}_2^2$  são colineares, como mostra-se na [FIGURA 21](#).

### 3.4.3 Continuidade $G^1$ para superfícies B-Spline

Para que duas superfícies sejam  $G^1$  contínuas ao longo de uma borda comum, as derivadas com respeito a ambos parâmetros  $\xi$  e  $\eta$  devem cumprir a condição da Equação (3.37). As primeiras derivadas de uma superfície B-Spline nos contornos  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$  são:

$$\frac{\partial \mathbf{S}(0, \eta)}{\partial \xi} = \frac{p}{\xi_{p+2}} \sum_{j=1}^m M_{j,q}(\eta) (\mathbf{P}_{2,j} - \mathbf{P}_{1,j}) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(0, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_{j,q}(\eta)}{\partial \eta} \mathbf{P}_{1,j} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(1, \eta)}{\partial \xi} = \frac{p}{1 - \xi_n} \sum_{j=1}^m M_{j,q}(\eta) (\mathbf{P}_{n,j} - \mathbf{P}_{n-1,j}) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(1, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_{j,q}(\eta)}{\partial \eta} \mathbf{P}_{n,j} \quad (3.44)$$

Dados dois *patches*<sup>1</sup> com uma borda comum e a mesma parametrização ao longo da borda comum:

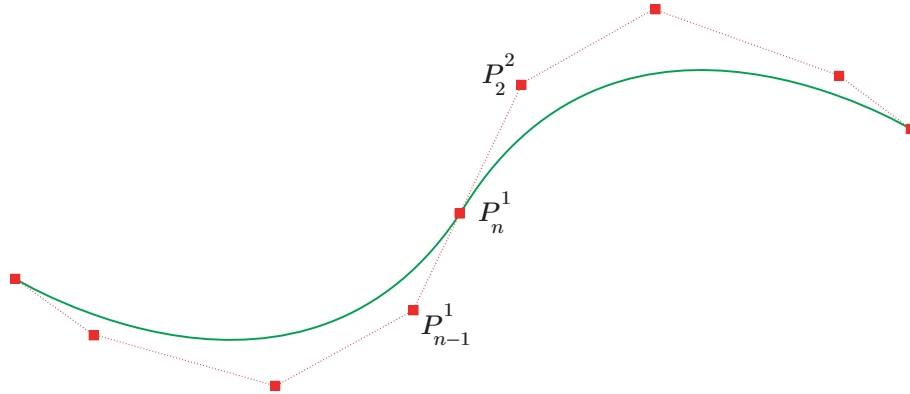
$$\mathbf{S}^1(1, \eta) = \mathbf{S}^2(0, \eta) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}_{n,j}^1 = \mathbf{P}_{1,j}^2 \quad M_{j,q}^1(\eta) = M_{j,q}^2(\eta) \quad j = 1, \dots, m \quad (3.46)$$

Então, a derivada com respeito a  $\eta$  ao longo da borda é igual em ambas superfícies para qualquer ponto sobre a borda:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^1(1, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{S}^2(0, \eta)}{\partial \eta} \quad (3.47)$$

<sup>1</sup> Um *patch NURBS* é definido sobre um domínio paramétrico, o qual é dividido em intervalos pelos vetores de nós.

FIGURA 21 – Curva B-Spline com continuidade geométrica  $G^1$ .

Fonte: Adaptado de [Kiendl \(2011\)](#).

Nota: Os pontos de controle  $P_{n-1}^1$ ,  $P_n^1$  e  $P_2^2$  são colineares, para garantir  $G^1$ .

A condição:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^1(1, \eta)}{\partial \xi} = c \cdot \frac{\partial \mathcal{S}^2(0, \eta)}{\partial \xi} \quad (3.48)$$

É cumprida se para todos os pontos de controle que atravessam a borda a seguinte relação se mantém:

$$(P_{2,j}^2 - P_{n,j}^1) = c \cdot (P_{n,j}^1 - P_{n-1,j}^1) \quad j = 1, \dots, m \quad (3.49)$$

#### 3.4.4 Continuidade $G^1$ para superfícies NURBS

Para a continuidade  $G^1$  entre patches NURBS, as superfícies devem ser  $G^1$  contínuas na configuração homogênea, isto é, a Equação (3.49) deve ser aplicada aos pontos de controle homogêneos ([KIENDL, 2011](#)):

$$(P_{2,j}^{w,2} - P_{n,j}^{w,1}) = c \cdot (P_{n,j}^{w,1} - P_{n-1,j}^{w,1}) \quad j = 1, \dots, m \quad (3.50)$$



## 4 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Neste capítulo será apresentado o conceito da *Análise Isogeométrica (AIG)* e suas diferenças do clássico *Método dos Elementos Finitos (MEF)*.

Tanto em desenho como em engenharia, a introdução de computadores pessoais teve um impacto enorme no jeito de planejar e projetar. O *Desenho Assistido por Computadora (CAD)*, especialmente em termos de arquitetura, e os softwares para *Engenharia Assistida por Computador (CAE)* podem ser apontados como exemplos conhecidos. Porém, em termos dos métodos computacionais subjacentes, em alguns casos foram escolhidas abordagens completamente diferentes, como no contexto do método matemático para descrever entidades geométricas.

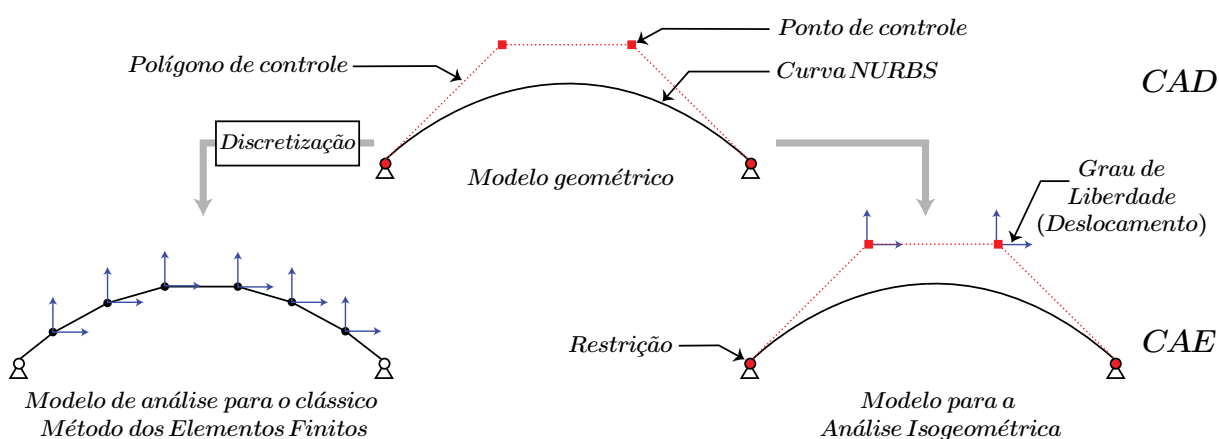
A *Análise Isogeométrica (AIG)* é um enfoque recente que tem suas raízes no trabalho de Hughes et al. (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) antes de ser detalhado e formalizado em Hughes, Bazilevs e Cottrell (2009), no contexto do desenvolvimento de novas ferramentas para a análise numérica em engenharia. Isso introduziu um novo paradigma. De fato, este enfoque está rompendo com o que é feito na clássica *Análise por Elementos Finitos (AEF)*. Na tradicional AEF, os polinômios de Lagrange de baixa ordem, geralmente lineares, são utilizados como funções de base para a análise, enquanto o modelado da geometria é baseado em técnicas tais como funções B-Spline, NURBS (PIEGL; TILLER, 1997), T-Splines (SEDERBERG et al., 2003) ou subdivisão da superfície (PETERS; REIF, 2008). Como consequência, é necessária uma conversão do modelo da geometria que é desenhada num programa CAD, para ser analisada por AEF. Para a análise, a geometria se converte numa malha de elementos finitos, pelo que este processo denomina-se *Discretização*. É uma tarefa importante na prática diária da engenharia, especialmente para casos não padronizados como geometrias complexas e para pesquisas paramétricas de variações geométricas. Esta conversão do modelo causa uma série de problemas. O problema mais óbvio é que devido à conversão do modelo, a informação geométrica é perdida. A geometria da AEF é só uma aproximação da geometria original e a qualidade desta aproximação depende da *densidade da malha*. Porém, uma exata descrição da geometria é crucial se pequenas imperfeições geométricas podem decidir sobre o comportamento estrutural geral, como na flambagem de cascas finas (GEE; RAMM; WALL, 2005). Outro aspecto é o impacto do tempo de *discretização*, o qual é um sério problema em aplicações industriais, especialmente porque todo o processo se deve refazer cada vez que uma malha precisa ser refinada ou modificada. Também os chamados erros de discretização devem ser considerados. Além disso, a diferença existente nas descrições da geometria causa uma violação no fluxo de trabalho do desenho, quando o desenho é pensado

como um processo integrado e recíproco entre arquitetura e engenharia.

A ideia da *Análise Isogeométrica* é que as funções usadas para a descrição da geometria em CAD são adotadas pela análise para a geometria e o campo de solução (*conceito Isoparamétrico*). Com isso, todo o processo de *discretização* pode ser omitido e os dois modelos de desenho e análise se fundem em um.

Então AIG permite usar diretamente o modelo da geometria do CAD (desenho) como modelo de análise dentro de CAE (análise). Portanto, as conversões de modelo tornam-se dispensáveis. A descrição da geometria do modelo de análise só difere em termos de maior refinamento. Isto em contraste com um modelo de análise discretizado com elementos finitos clássicos, como é mostrado na [FIGURA 22](#).

FIGURA 22 – Modelos de análise para o clássico AEF e para AIG.



Fonte: O autor.

#### 4.1 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA BASEADA EM NURBS

Nesta dissertação são utilizadas as funções B-Splines Racionais Não Uniformes (NURBS) (HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009). A escolha destas funções é devido a sua grande presença nos programas CAD e facilidade de implementação (com algoritmos já padronizados (PIEGL; TILLER, 1997)). Porém, todas as funções usadas em CAD poderiam ser usadas como base para AIG. Algumas que já foram aplicadas para análise são T-Splines (BAZILEVS; CALO et al., 2010) e subdivisão da superfície (CIRAK; ORTIZ; SCHRÖDER, 2000) (CIRAK; ORTIZ, 2001) (CIRAK; SCOTT et al., 2002). É importante provar que a AIG baseada em NURBS resulta em métodos convergentes. As condições suficientes para um teste básico de convergência para uma ampla classe de problemas são satisfeitas por uma base que é (BATHE, K. J., 2006) (HUGHES, 2012):

- $C^1$  contínua no interior do elemento,
- $C^0$  contínua nos contornos dos elementos,
- e completa.

A facilidade com que a continuidade sobre os contornos do elemento pode ser controlada foi discutida no capítulo 3. Além disso, pode ser mostrado que o *conceito isoparamétrico* e a propriedade de *partição da unidade* são suficientes para assegurar a terceira condição, uma base completa. Estas três condições são satisfeitas numa base NURBS. As provas de vários outros teoremas sobre convergência da AIG baseada em NURBS são discutidos por [Bazilevs, Beirão da Veiga et al. \(2006\)](#).

## 4.2 O CONCEITO ISOPARAMÉTRICO

Uma das ideias comuns à clássica AEF e a AIG é o *conceito isoparamétrico* ([BATHE, K., 1982](#)) ([ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, 2000](#)) ([OÑATE, Eugenio, 2010](#)). Na clássica AEF, começamos construindo o espaço de aproximação da solução do problema. Para isto, usam-se polinômios do tipo Lagrange que têm a peculiaridade de serem interpoláveis nos nós da malha. Seguidamente o conceito isoparamétrico é invocado para discretizar a geometria do problema. Pelo contrário, a AIG propõe iniciar da geometria e logo invocar o conceito isoparamétrico, isto é, usar as mesmas funções de base para a análise que as que se utilizam para construir a geometria nos modelos CAD. Em outras palavras, na clássica AEF o campo de solução é imposto na geometria enquanto na AIG a geometria é imposta no campo de solução. Na [FIGURA 23](#) ilustra-se o conceito mencionado. Ao fazer isto, já não somente ficamos focados no ponto de vista da análise. O objetivo da abordagem é tentar preencher o vazio entre os modelos CAD e AEF. Com AIG tem-se a oportunidade de processar o desenho e a análise com exatamente os mesmos modelos geométricos. Os passos para construir geometrias simplificadas e gerar malhas, muitas vezes tediosas na AEF, podem se tornar óbvias na AIG. Então na AIG a representação da geometria é exata, independentemente do tipo de refinamento utilizado.

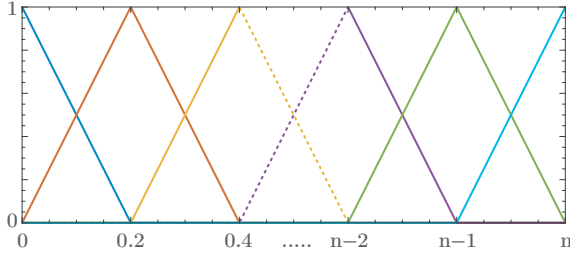
## 4.3 ELEMENTO ISOGEOMÉTRICO NURBS

Como foi mostrado no Capítulo 3, um *patch* NURBS é definido sobre um domínio paramétrico, o qual é dividido em intervalos pelos vetores de nós. Esses intervalos são definidos como *elementos*. A razão para essa definição é que dentro de um intervalo de nós, as funções de base B-Spline são polinômios e, portanto, a quadratura de Gauss pode ser usada para a integração no nível de elemento. As funções básicas

FIGURA 23 – Conceito isoparamétrico no âmbito da AEF e AIG.

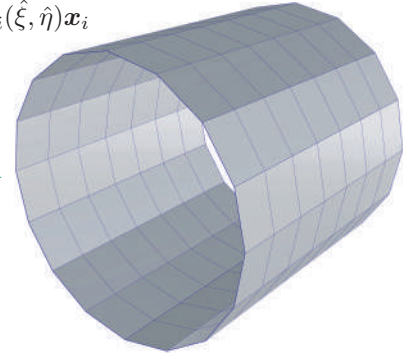
*AEF:*

$$U = \sum_{i=1}^n N_i(\hat{\xi}, \hat{\eta}) u_i$$



*Construção de funções tipo Lagrange para interpolar os deslocamentos*

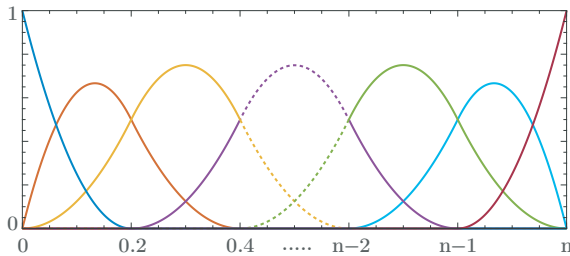
$$S = \sum_{i=1}^n N_i(\hat{\xi}, \hat{\eta}) x_i$$

*Imposta*

*Aproximação da geometria CAD*

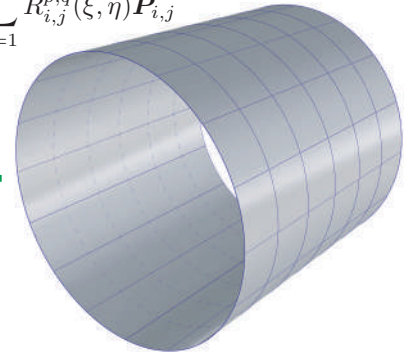
*AIG:*

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) u_{i,j}$$



*Utilização das funções NURBS para interpolar os deslocamentos*

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j}$$

*Imposta*

*Construção da geometria em CAD*

Fonte: O autor.

NURBS não são polinômios regulares, mas sim polinômios racionais. Portanto, a integração com quadratura de Gauss é só uma aproximação para funções de base NURBS. Mas é importante lembrar que não se integram as funções de base em si, senão a formulação do elemento, que em geral dá como resultado a integração de polinômios racionais de todos modos. Por exemplo, a formulação padrão de um elemento sólido inclui a integração sobre a inversa do determinante do Jacobiano. Somente no caso de elementos retangulares ou paralelogramos, o integrando é um polinômio não racional. O uso da quadratura de Gauss para os elementos NURBS tem sido pesquisado e comprovado como confiável na literatura (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). Hughes et al. descreveu uma nova regra de integração para NURBS que faz uso das maiores continuidades entre os elementos e, portanto, é mais eficiente que a quadratura de Gauss (HUGHES; REALI; SANGALLI, 2010). Para os exemplos apresentados nesta dissertação é usada a integração por quadratura de Gauss tradicional.

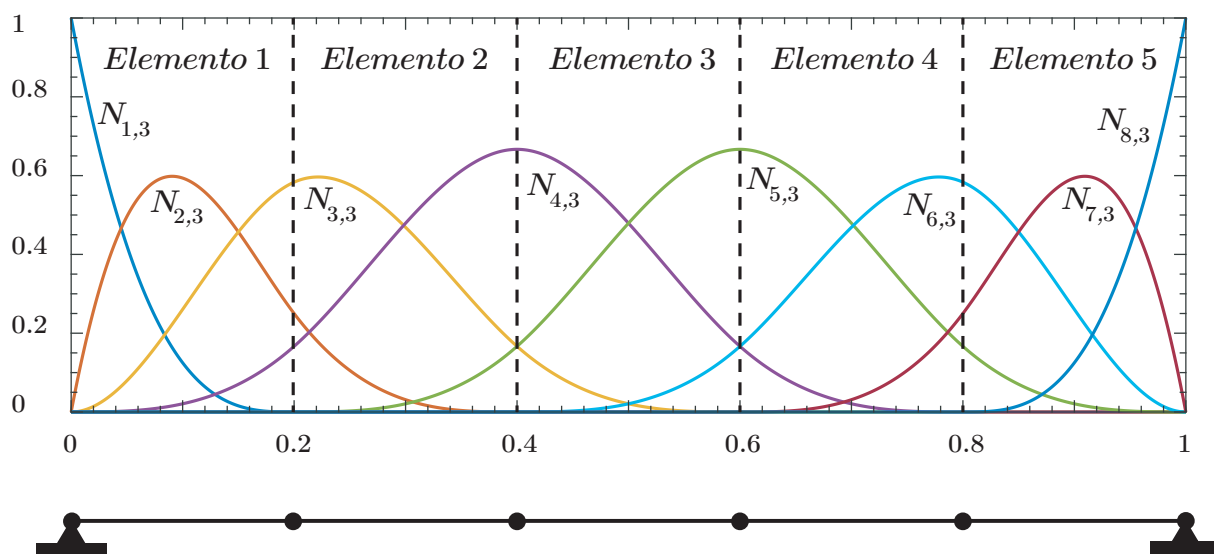
Equivalentemente a elementos finitos, um elemento NURBS é definido por um conjunto de nós e suas correspondentes funções de base. Os nós são os pontos de controle. Eles carregam os graus de liberdade para a análise e as condições de contorno

(restrições) são aplicadas a eles, como mostra a [FIGURA 22](#). Como a formulação do elemento nesta dissertação é baseada em deslocamentos, os graus de liberdade são os deslocamentos dos pontos de controle. Para estruturas tridimensionais, isso significa que cada ponto de controle possui três graus de liberdade, ou seja, os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

É importante notar que com esta definição de elementos, as funções de base B-Spline não estão confinadas a um elemento, mas se estendem por uma série de elementos, como mostram a [FIGURA 24](#) para o caso unidimensional e a [FIGURA 25](#) para caso bidimensional. Esta é uma diferença muito importante com respeito à clássica AEF porque permite uma maior continuidade das funções de forma sobre os contornos dos elementos. A natureza de ordem superior das funções de base B-Spline geralmente resulta em uma maior precisão em comparação com os elementos de ordem inferior. Os elementos NURBS também tem continuidade de alta ordem entre os elementos, que é a base para a formulação do elemento que se apresenta no próximo capítulo. Por outro lado, isso significa que os elementos estão interconectados e não são independentes entre si. As funções de base dentro de um intervalo de nós estão definidas pela expressão recursiva de *Cox-deBoor*, Equação (3.2), e dependem dos intervalos de nós adjacentes. Portanto, não é possível definir um único elemento NURBS sem um *patch* NURBS completo. Neste contexto, vale a pena discutir o termo *elementos*, já que eles não são independentes, como partes elementares que podem ser montadas arbitrariamente para formar um modelo maior. No entanto, para implementação, esses elementos podem ser tratados exatamente da mesma forma que os elementos finitos clássicos. A matriz de rigidez, por exemplo, é avaliada no nível do elemento e montada na matriz de rigidez global. A única diferença é o uso de diferentes funções de forma. O fato de que os nós, isto é, os pontos de controle, geralmente estão fora do elemento, é apenas uma consequência das funções de base utilizadas e não faz nenhuma diferença no tratamento desses elementos num código de elementos finitos.

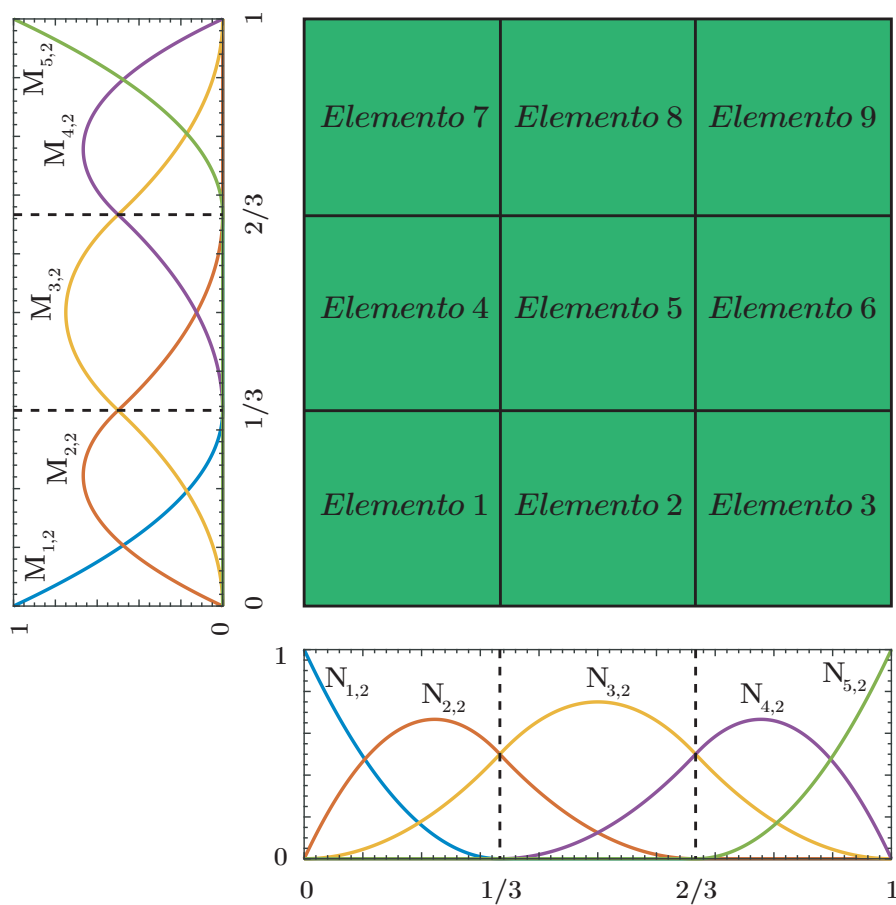
Muitos fenômenos de travamento em análise estrutural, e especialmente na análise de cascas e placas, são uma consequência das funções de base de baixa ordem que não podem representar corretamente o comportamento físico ([ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, 2000](#)) ([CHAPELLE; BATHE, 2003](#)) ([OÑATE, E., 2013](#)). Como NURBS são funções de ordem superior, esses efeitos de travamento podem ser evitados desde o início ([KIENDL, 2011](#)) ([SAFARI; ALMSTEDT, 2017](#)). Assim mesmo, no recente trabalho de Adam et al. ([ADAM, Cédric et al., 2014](#)) foram propostos esquemas de integração reduzida/seletiva para problemas unidimensionais de vigas no contexto de AIG, que evitam os problemas de travamento de membrana e de cisalhamento, e num segundo trabalho de [C. Adam et al. \(2015\)](#) esses esquemas de integração são estendidos para problemas de placas e cascas também no contexto de AIG que produzem elementos livres de algum tipo de travamento.

FIGURA 24 – Elemento isogeométrico unidimensional.



Fonte: O autor.

FIGURA 25 – Elemento isogeométrico bidimensional.



Fonte: O autor.



As seguintes propriedades importantes de NURBS como base para análise estão resumidas:

- As funções de base cumprem os requisitos de independência linear e partição da unidade. Elas têm um suporte local, dependendo do grau do polinômio.
- As funções de base têm continuidade de ordem superior sobre os contornos dos elementos.
- Graus de liberdade são definidos nos pontos de controle.
- O conceito isoparamétrico é usado.
- Movimentos de corpo rígido são tratados corretamente (zero deformação) devido à propriedade de covariância afim de NURBS (HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009).
- Efeitos de travamento decorrentes de funções de base de baixa ordem podem ser excluídos ao início.

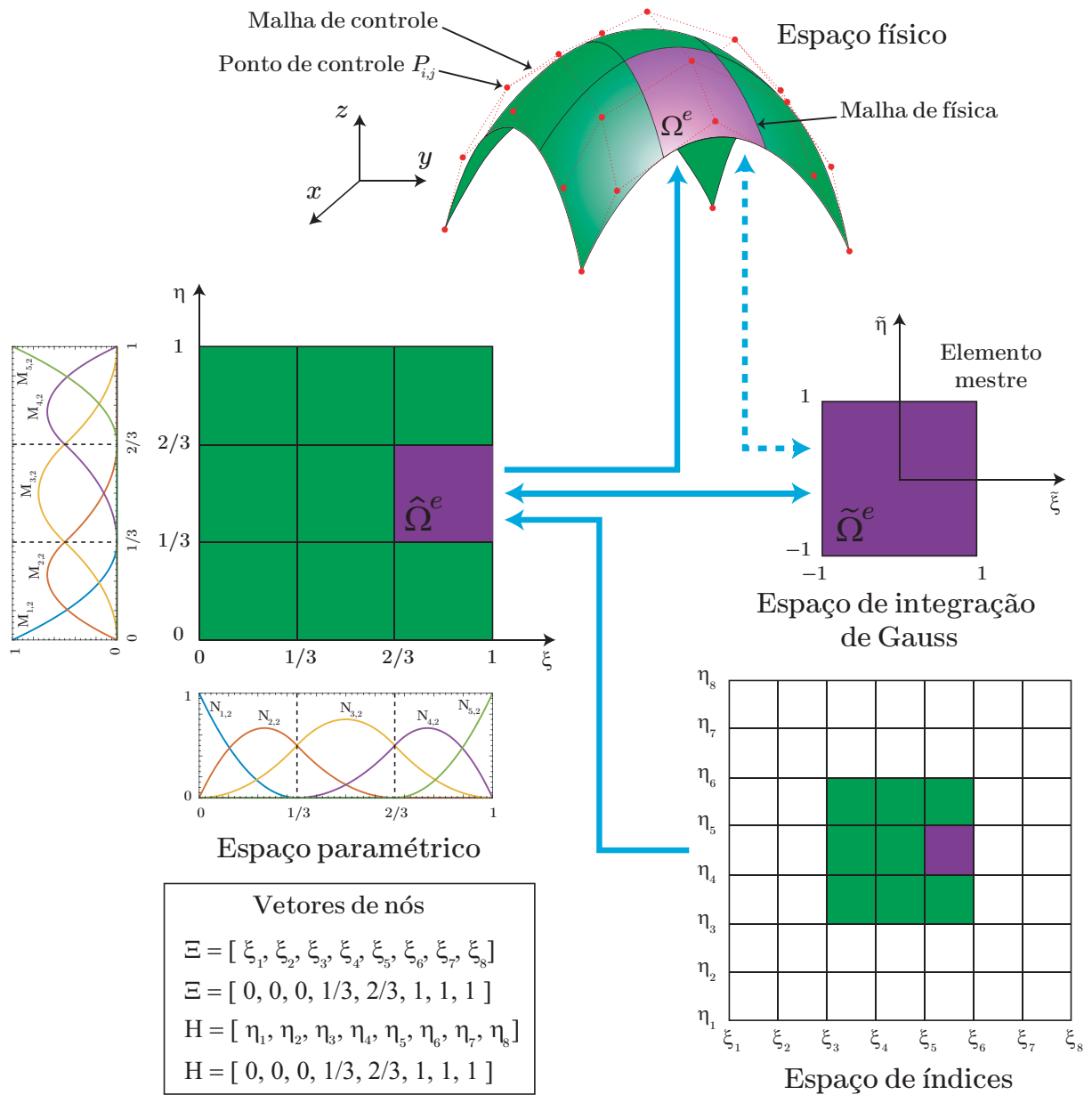
#### 4.4 ESPAÇOS DE ANÁLISE

Na AIG, há três espaços de análise relevantes: o espaço físico, o espaço paramétrico/índices e o espaço de integração de Gauss. Na FIGURA 26 os espaços são visualizados para uma superfície NURBS 3D.

##### 4.4.1 Malha física e malha de controle

Na AIG tem-se dois conceitos de malhas, a malha física e a malha de controle. A malha física é a representação da geometria, com a qual se está trabalhando, no espaço físico, decomposta em elementos, sejam eles, *pathes* ou *elementos isogeométricos NURBS*. A malha de controle é formada a partir dos pontos de controle, e são nestes pontos que estão localizados os graus de liberdade ou variáveis de controle como se pode observar na FIGURA 22. A malha de controle consiste de elementos multilineares, e, em duas dimensões, eles são elementos quadriláteros bilineares. A malha de controle não se ajusta à geometria real. Em vez disso, é como uma armação que controla a geometria. Na parte superior da FIGURA 26 podem ser observadas as duas malhas.

FIGURA 26 – Espaços de análises em AIG.



Fonte: O autor.

#### 4.4.2 Espaço físico

O espaço físico é onde a geometria real é representada por uma combinação linear das funções de base e os pontos de controle. O espaço físico tem suas coordenadas definidas no espaço cartesiano  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Também é no espaço físico onde se visualizam os campos de deslocamentos, deformações, tensões, entre outros (CADENA, 2017). Um exemplo do espaço físico é apresentado na parte superior da FIGURA 26.



#### 4.4.3 Espaço de índices

No espaço de índices de um *patch*, cada nó pode ser identificado de forma única, que inclui os nós com multiplicidade maior que um. O espaço de índices considera um comprimento de  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$  na direção paramétrica  $\xi$  e  $[\eta_1, \eta_{m+q+1}]$  na direção paramétrica  $\eta$ . Portanto, tem um área de  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ . Assim, o espaço de índices está formado pela intersecção dos nós, pertencentes aos vetores de nós,  $\Xi$  e  $H$ , que juntos geram uma grade retangular (CADENA, 2017). Um exemplo do espaço de índices pode ser visto na FIGURA 26. Os retângulos pertencentes a esta grade representam todos os elementos gerados pelos nós existentes, tanto os elementos de área nula quanto os elementos de área não nula.

#### 4.4.4 Espaço paramétrico

O espaço paramétrico é onde as funções de base NURBS são definidas, Equação (3.20). Este espaço pode ser entendido como um espaço de índices compacto, onde apenas os elementos com áreas não nulas são observados. É um espaço retangular orientado no sistema de coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ . Nele pode-se observar os elementos que são mapeados no espaço físico, os quais efetivamente contribuem para a análise numérica (CADENA, 2017). O espaço paramétrico é um sistema local para os *patches*. Cada elemento no espaço físico é, portanto, uma imagem do elemento correspondente no espaço paramétrico (HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009). Um exemplo de um espaço paramétrico também pode ser visto na FIGURA 26.

#### 4.4.5 Espaço de integração de Gauss

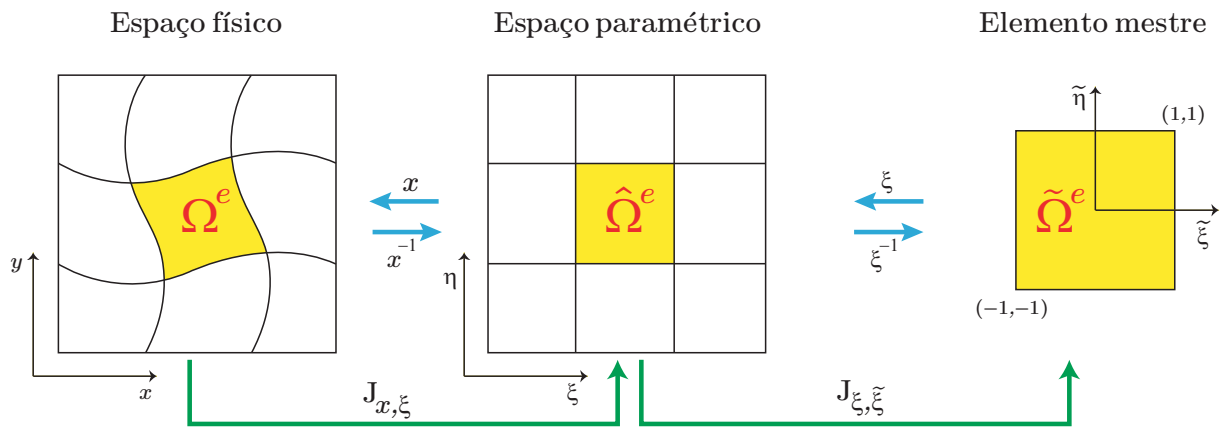
O espaço de integração é um domínio quadrado de coordenadas  $\tilde{\xi}$  e  $\tilde{\eta}$ , e é delimitado pelos intervalos  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , respectivamente. Neste espaço são escolhidas as posições dos pontos de Gauss para a realização das integrações numéricas das matrizes de rigidez e dos vetores de força. A integração é executada em um elemento por vez no espaço de integração. O elemento é então associado de volta para o espaço paramétrico onde a maioria da análise ocorre, como por exemplo, o cálculo das funções de base, suas derivadas e o determinante do Jacobiano de retorno. Um exemplo de espaço de integração pode ser visto na FIGURA 26.

É assim, que o *patch* inteiro é então trazido de volta para o espaço físico. Depois de resolver o sistema de equações, um pós-processamento é necessário para obter resultados na própria geometria. Raramente os coeficientes dos pontos de controle coincidem com o que é procurado, especialmente porque os pontos de controle diferem dos nós da clássica AEF, pois não estão na própria geometria (HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009).

#### 4.5 MAPEAMENTO

Durante o cálculo da matriz de rigidez e vetor de força, as integrais são avaliadas utilizando a quadratura de Gauss no *elemento mestre*. Para fazer isso, é necessário passar do espaço físico para o espaço de integração, onde a integração é pré-formada. Isso é feito “*mapeando através do*” espaço paramétrico. Veja a FIGURA 27.

FIGURA 27 – Mapeamento entre espaços.



Fonte: O autor.

Primeiramente, tem-se o mapeamento geométrico entre o espaço paramétrico e o espaço físico, simbolizado por  $x : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ , o qual é invertido,  $x^{-1} : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ , para que ocorra o mapeamento de um elemento pertencente ao espaço físico,  $\Omega^e$ , para o espaço paramétrico,  $\hat{\Omega}^e$ . Então o *Jacobiano da transformação* é:

$$J_{x,\xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Na sequência, com base no mapeamento afim, que ocorre entre o espaço de integração e o espaço paramétrico, simbolizado por  $\xi : \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ , que também é invertido,  $\xi^{-1} : \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , de tal maneira que se possa mapear um elemento do espaço paramétrico,  $\hat{\Omega}^e$ , para o espaço de integração,  $\tilde{\Omega}^e$ , esta relação é dada por:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi(\tilde{\xi}) \\ \eta(\tilde{\eta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)\tilde{\xi} + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} \\ \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)\tilde{\eta} + (\eta_{i+1} + \eta_i)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Neste caso, a matriz Jacobiana da transformação é:

$$\mathbf{J}_{\xi, \tilde{\xi}}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\eta}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dessa maneira, como é apresentado na [FIGURA 27](#), o mapeamento de um elemento do espaço físico  $\Omega^e$ , para um elemento no espaço de integração,  $\tilde{\Omega}^e$ , exige a composição dos mapeamentos,  $x^{-1} : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$  e  $\xi^{-1} : \hat{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , cuja matriz Jacobiana combinada é:

$$\mathbf{J}_{x, \tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{\eta}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{\eta}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{x, \xi} \mathbf{J}_{\xi, \tilde{\xi}} \quad (4.4)$$

#### 4.6 COMPARAÇÃO DA AIG COM A CLÁSSICA AEF

Enquanto a AIG e a clássica AEF tem muitos termos em comum, seus significados diferem entre os dois métodos. Os termos utilizados na AIG podem ser confusos para o leitor habituado em AEF. Algumas das coisas que parecem semelhantes, mas levam a suposições erradas, se forem usadas de forma intercambiável. Assim, as diferenças são apresentadas por Hughes et al., e mostradas na seguinte [TABELA 1](#).

TABELA 1 – Diferenças entre a AIG e a AEF.

Análise isogeométrica	Análise por elementos finitos
Geometria exata	Geometria aproximada
Pontos de controle	Nós
Variáveis de controle	Variáveis nodais
Funções não interpoláveis	Funções interpoláveis
Baseado em NURBS	Baseado em polinômios
Alta continuidade (controlável)	Continuidade $C^0$ fixa
Funções de base sempre positivas	Funções de base não obrigatoriamente positivas
Propriedade de envolvente convexa	Sem propriedade
Variações geométricas suaves	Variações abruptas

Fonte: [Hughes, Bazilevs e Cottrell \(2009\)](#)

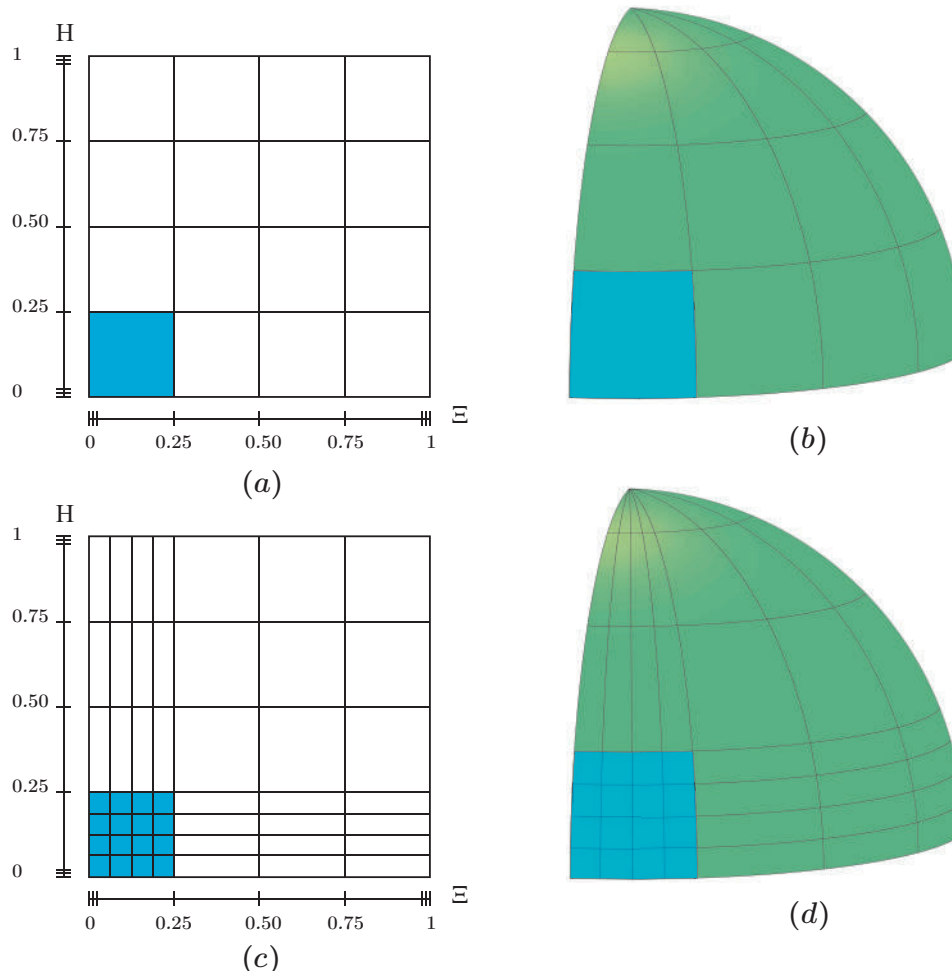
Das diferenças mencionadas na [TABELA 1](#) a que mais relevância tem é, sem dúvida, a exatidão com que se representa a geometria. Em seguida destaca-se o refinamento das malhas. Aqui o mesmo fator que proporciona uma exatidão da geometria, também tem implicações ao nível do refinamento da geometria que, no caso da AIG, é independente de um modelo original, pois a informação é a mesma. Finalmente, destaca-se o fato de que nem os pontos de controle nem as variáveis de

controle serem, no caso da AIG, interpoláveis, ao contrario do que sucede na AEF com os nós e as variáveis nodais.

#### 4.7 REFINAMENTO NA AIG

Os métodos de refinamento mostrados na seção 3.3, são usados para o refinamento da malha na análise. Com a inserção de nós, o número de elementos é incrementado e com a elevação de ordem aumenta o grau do polinômio das funções de base. Uma importante diferença com respeito à clássica AEF, é que o refinamento para a AIG não muda a geometria. Isto significa que em cada passo de refinamento, a geometria é representada exatamente e, portanto, uma malha refinada pode ser refinada sem a necessidade de retornar ao modelo original.

FIGURA 28 – Refinamento “local” de um elemento NURBS.



Fonte: Adaptado de [Kiendl \(2011\)](#).

Nota: (a) Espaço paramétrico sem refinamento. (b) Espaço físico sem refinamento. (c) Espaço paramétrico com refinamento. (d) Espaço físico com refinamento.

Uma curva NURBS pode ser refinada por inserção de nós, onde os nós podem ser inseridos arbitrariamente. Isto significa que refinamentos locais para curvas NURBS são possíveis. Porém, para superfícies NURBS, um nó inserido na direção  $\xi$  se estende sobre todo o *patch* na direção  $\eta$  e vice-versa, ver a [FIGURA 28](#). Em (a), o espaço paramétrico sem refinamento é mostrado. O primeiro elemento, o qual é destacado, será refinado. Em (b), mostra-se o correspondente espaço físico. Em (c), o espaço paramétrico com refinamento é representado e em (d) o correspondente espaço físico. Portanto, um refinamento local puro não é possível para *patches* NURBS ([COTTRELL; HUGHES; REALI, 2007](#)). A razão para isso é a estrutura de produto tensorial das superfícies NURBS. Uma alternativa poderia ser o uso de *T-Splines*, os quais não estão confinados a uma estrutura de produto tensorial. Como foi mostrado na seção [3.3](#), a inserção de nós e elevação de ordem podem ser combinados, para obter o chamado *refinamento k* ([HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005](#)) ([COTTRELL; HUGHES; REALI, 2007](#)) ([HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009](#)), mas é importante saber que a sequência de aplicação não é intercambiável. Enquanto a elevação de ordem preserva todas as continuidades, a inserção de nós diminui a continuidade nesta localização. Isto significa que desenvolvendo a elevação de ordem antes que inserção de nós produz uma continuidade de alta ordem na geometria refinada do que vice-versa.

## 5 CASCAS DE KIRCHHOFF – LOVE BASEADAS EM NURBS

As cascas são estruturas onde uma dimensão (espessura) é significativamente menor que as outras duas. Elas são estruturas de paredes finas, resultantes de uma otimização natural que reduz as cargas mortas e minimiza o material utilizado. Assim, elas são caracterizadas por sua curvatura e pequena espessura. Uma placa é um caso especial de cascas sem curvatura. Exemplos de cascas na natureza são ovos, conchas do mar, cascas de nozes ou partes de organismos vivos como crânios humanos, escudos de tartarugas, etc. Seu primeiro uso pela humanidade como estruturas de construção foi, já em 126 DC, na forma da cúpula de concreto do *Pantheon* (FIGURA 29). Muitas das estruturas mais famosas do mundo, como o *Taj Mahal* na Índia (FIGURA 30), a *Hagia Sophia* na Grécia (FIGURA 31), a *igreja de St. Paul* na Inglaterra (FIGURA 32), têm cúpulas de cascas desde séculos e ainda estão fortes. Sua versatilidade é evidente pelo seu uso em diferentes campos das ciências, como na engenharia civil, automotor, naval e aeroespacial. Mesmo na vida cotidiana, as cascas são encontradas na forma de latas, garrafas, bolas, corpo de eletrodomésticos e muito mais. Os benefícios do uso de cascas são sua eficiência de custo, pois são ocas e economizam material. Elas também são estruturas finas e leves, que podem ser manipuladas ou transportadas facilmente. São visualmente agradáveis e boas para acústica, como ocorre em vários auditórios, teatros, igrejas que têm telhados de casca. Finalmente, elas também são computacionalmente eficientes, já que a redução de dimensão pode ser feita e, portanto, grandes poupanças nos graus de liberdade e tempos de computação podem ser observadas.

Quando projetadas adequadamente, as cascas estão sujeitas exclusivamente às forças de membrana, que são paralelas à superfície média ou à linha central. O estado de membrana é desejável porque otimiza o uso do material, mantendo aproximadamente constante a distribuição de tensões através da espessura. Durante a flexão, as cascas são muito mais flexíveis devido a que as fibras do material na direção da espessura são mais solicitadas. As forças de membrana esticam ou retraem a linha central da casca, enquanto que as forças de flexão preservam a extensão (ou compressão) da linha central. Na prática, geralmente ambas ações de membrana e flexão estão envolvidas, mas um bom projeto garante que a ação de membrana seja predominante.



FIGURA 29 – Cúpula de concreto do *Pantheon*.



Fonte: Zhou (2019).

FIGURA 30 – Cúpula do *Taj Mahal*.



Fonte: Zhou (2019).

FIGURA 31 – Cúpula da catedral *Hagia Sophia*.



Fonte: Zhou (2019).

FIGURA 32 – Cúpula da igreja de St. Paul.



Fonte: Zhou (2019).

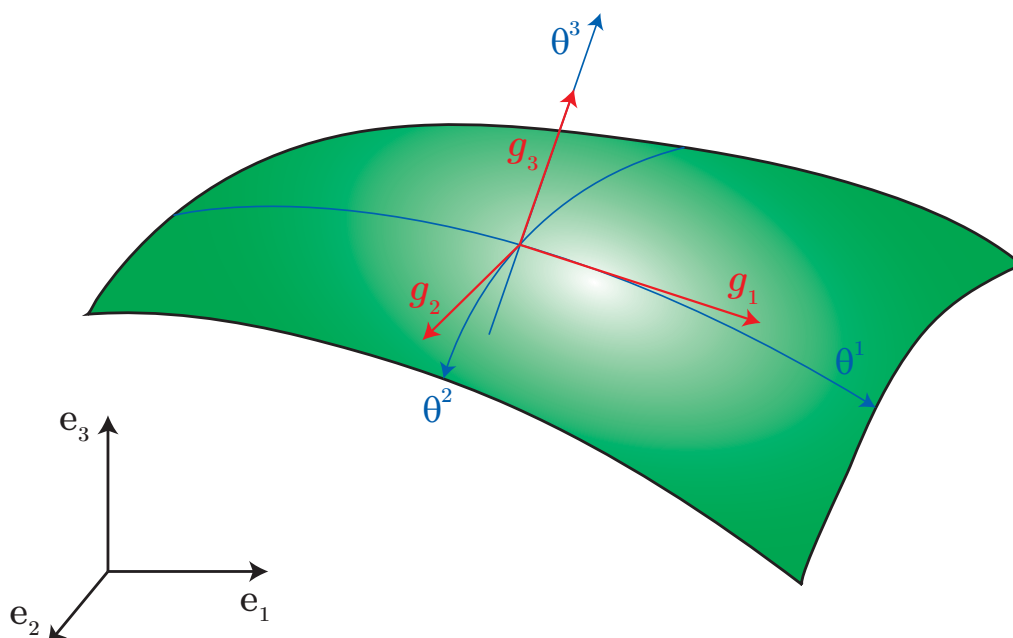


Nesta dissertação, o foco é no estudo de cascas finas. Em função de sua esbelteza as cascas são pouco ou nada dependentes da flexão. Isso leva a estruturas menos redundantes e mais suscetíveis a imperfeições geométricas. Um requisito de maior precisão geométrica é uma das razões pelas quais a AIG é especialmente adequada para análise de cascas finas. Neste capítulo, é introduzida a formulação de cascas baseadas na teoria de Kirchhoff-Love no contexto da AIG, seguindo de perto os trabalhos publicados por [Kiendl, Bletzinger et al. \(2009\)](#), [Kiendl \(2011\)](#), [Beer \(2015\)](#) e [Safari e Almstedt \(2017\)](#). Para isso serão revisados os seguintes conceitos: geometria diferencial de superfícies, fundamentos da mecânica do contínuo, teoria de cascas de Kirchhoff-Love, formulação de elemento com NURBS e imposição das condições de contorno.

### 5.1 GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SUPERFÍCIES

Neste item, apresenta-se uma breve revisão da geometria diferencial de superfícies. [Bathe et al. \(CHAPELLE; BATHE, 2003\)](#) e [do Carmo \(PERDIGÃO DO CARMO, 2016\)](#) fornecem uma completa descrição sobre *geometria diferencial*.

FIGURA 33 – Superfície no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .



Fonte: O autor.

Com coordenadas curvilíneas (azul), base local (vermelho) e base ortonormal de referência (preto).

Notações e variáveis são descritas a medida que aparecem, mas ao longo do capítulo aplica-se o seguinte:

- A convenção usual para índices latinos e gregos, isto é,  $i = 1, 2, 3$  e  $\alpha = 1, 2$ .
- As regras de soma de Einstein.
- A virgula para diferenciação parcial, por exemplo  $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .
- Subscritos para componentes covariantes.
- Sobrescritos para componentes contravariantes.

Cada ponto no espaço tridimensional pode ser identificado por seu vetor posição  $\mathbf{x}$ , que esta composto por suas coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$  e pelos vetores unitários de uma base ortonormal de referência, como  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , logo:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^i \mathbf{e}_i \quad (5.1)$$

Neste exemplo a base  $\mathbf{e}_i$  denota a base cartesiana global, mas para descrever superfícies de forma livre é útil usar coordenadas curvilíneas e uma base local. A **FIGURA 33** mostra um exemplo de uma superfície no espaço tridimensional com essas coordenadas e base. Duas bases importantes são a *base covariante*  $\mathbf{g}_i$  e a *base contravariante*<sup>1</sup>  $\mathbf{g}^i$ . Com as correspondentes coordenadas contravariantes  $\theta^i$  e coordenadas covariantes  $\theta_i$ , o vetor posição  $\mathbf{x}$  pode ser expressado como:

$$\mathbf{x} = \theta^i \mathbf{g}_i = \theta_i \mathbf{g}^i \quad (5.2)$$

Os vetores da base covariante são definidos como:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{x}_{,i} \quad (5.3)$$

Os vetores de base covariantes e contravariantes são relacionados pela seguinte condição (função Delta de Kronecker):

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (5.4)$$

Uma superfície é uma geometria bidimensional definida parametricamente e cada ponto na superfície é descrita por duas coordenadas curvilíneas  $(\theta^1, \theta^2)$ . Isto

<sup>1</sup> Covariância e contravariância são conceitos frequentemente usados nas áreas de matemática e física teórica. Como regra geral, eles se referem ao fato de que certos objetos matemáticos, que podem representar alguma quantidade física, têm alguma forma de invariância de forma, ou seja, a propriedade de permanecer inalterado num determinado conjunto de transformações.

significa que os dois primeiros vetores de base covariante  $g_\alpha$  podem ser calculados como na Equação (5.3), enquanto que o terceiro vetor de base covariante  $g_3$  é definido como o vetor ortogonal normalizado a  $g_1$  e  $g_2$ :

$$g_3 = \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|} \quad (5.5)$$

Como pode ser deduzido da Equação (5.4), os vetores de base contravariantes  $g^\alpha$  encontram-se no plano tangencial definido pelos vetores de base covariantes  $g_\alpha$ . Portanto, o terceiro vetor de base contravariante  $g^3$  é igual a  $g_3$ :

$$g^3 = g_3 \quad (5.6)$$

Os vetores de base  $g_1$  e  $g_2$  também podem ser utilizados para definir uma base cartesiana local. Esta é uma base ortogonal e normalizada com uma orientação arbitrária. Aqui, é definido de tal forma que seu primeiro vetor base  $e_1$  é paralelo a  $g_1$ , e  $e_2$  é ortogonal a ele, que encontra-se no plano de  $g_1, g_2$ . O terceiro vetor base  $e_3$  é igual a  $g_3$ :

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} \quad (5.7)$$

$$e_2 = \frac{g_2 - (g_2 \cdot e_1)e_1}{\|g_2 - (g_2 \cdot e_1)e_1\|} \quad (5.8)$$

$$e_3 = g_3 \quad (5.9)$$

Uma quantidade importante para a descrição de superfícies é o *tensor métrico*  $g$ , também chamado *tensor identidade*. Este pode ser expressado na base covariante e contravariante:

$$g = g^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta = g_{\alpha\beta} g^\alpha \otimes g^\beta \quad (5.10)$$

Os *coeficientes métricos covariantes*  $g_{\alpha\beta}$  são calculados pelo produto escalar dos vetores de base covariantes (PERDIGÃO DO CARMO, 2016):

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta \quad (5.11)$$

A Equação (5.11) é conhecida como a *primeira forma fundamental da superfície* (PERDIGÃO DO CARMO, 2016). Esta contém propriedades importantes da superfície como o comprimento dos vetores base e os ângulos entre eles. Os *coeficientes métricos contravariantes*  $g^{\alpha\beta}$  são obtidos pela inversa da *matriz de coeficientes métricos covariantes*:

$$[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1} \quad (5.12)$$

Com a *matriz de coeficientes métricos contravariantes*  $g^{\alpha\beta}$ , os vetores base contravariantes podem ser calculados dos vetores base covariantes:

$$g^\alpha = g^{\alpha\beta} g_\beta \quad (5.13)$$

E vice-versa:

$$g_\alpha = g_{\alpha\beta} g^\beta \quad (5.14)$$

A *segunda forma fundamental da superfície*, Equação (5.15), descreve as propriedades das curvaturas de uma superfície. Os *coeficientes do tensor de curvaturas*  $b_{\alpha\beta}$  são definidos como em [Perdigão do Carmo \(2016\)](#):

$$b_{\alpha\beta} = -g_\alpha \cdot g_{3,\beta} = -g_\beta \cdot g_{3,\alpha} = g_{\alpha,\beta} \cdot g_3 \quad (5.15)$$

Nas seções seguintes, transformações dos coeficientes tensoriais entre diferentes bases são necessárias várias vezes. Aqui, uma abordagem geral para essas transformações é explicada num exemplo geral:

Duas bases diferentes  $a_i \otimes a_j$  e  $b_i \otimes b_j$ , assim como suas contrapartes contravariantes  $a^i \otimes a^j$  e  $b^i \otimes b^j$ , são dadas. Um tensor  $M$  pode ser expressado usando estas bases como:

$$M = a^{ij} a_i \otimes a_j = a_{ij} a^i \otimes a^j = b^{ij} b_i \otimes b_j = b_{ij} b^i \otimes b^j \quad (5.16)$$

A modo de exemplo, os coeficientes covariantes  $a_{ij}$  serão transformados nos coeficientes covariantes  $b_{ij}$ :

$$a_{ij} a^i \otimes a^j = b_{ij} b^i \otimes b^j \quad (5.17)$$

O artifício é multiplicar os vetores base covariantes  $b_k$  e  $b_l$  por dois lados, usando o fato de que os vetores base covariantes e contravariantes são relacionados por  $b_i \cdot b^j = \delta_i^j$ :

$$\begin{aligned} a_{ij} b_k (a^i \otimes a^j) b_l &= b_{ij} b_k (b^i \otimes b^j) b_l \\ a_{ij} (b_k \cdot a^i) (a^j \cdot b_l) &= b_{ij} (b_k \cdot b^i) (b^j \cdot b_l) \\ a_{ij} (b_k \cdot a^i) (a^j \cdot b_l) &= b_{ij} \delta_k^i \delta_l^j \\ a_{ij} (b_k \cdot a^i) (a^j \cdot b_l) &= b_{kl} \end{aligned} \quad (5.18)$$

O mesmo pode ser feito para coeficientes contravariantes para ambas bases. Portanto, existem quatro transformações possíveis:

$$b_{kl} = a_{ij} (b_k \cdot a^i) (a^j \cdot b_l) \quad (5.19)$$

$$b^{kl} = a_{ij} (b^k \cdot a^i) (a^j \cdot b^l) \quad (5.20)$$

$$b_{kl} = a^{ij} (b_k \cdot a_i) (a_j \cdot b_l) \quad (5.21)$$

$$b^{kl} = a^{ij} (b^k \cdot a_i) (a_j \cdot b^l) \quad (5.22)$$

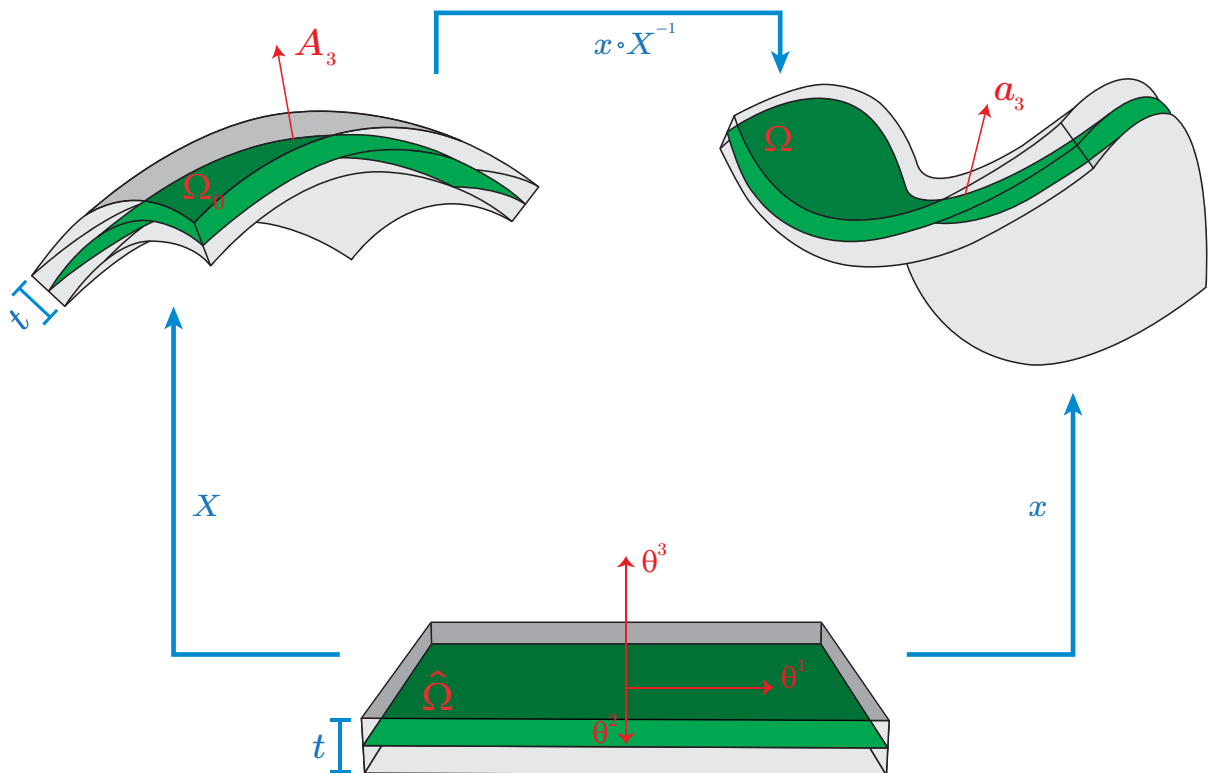
As Equações (5.19) a (5.22) fornecem as regras de transformação de coeficientes necessárias nas seções seguintes.

## 5.2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

Nesta seção, são revisados os fundamentos da Mecânica do Contínuo. Assim, com base nas quantidades básicas da geometria diferencial que foram introduzidas na Seção 5.1, são derivadas as equações cinemáticas mais importantes. Pequenos deslocamentos e pequenas deformações são assumidos e a descrição Lagrangiana é usada.

Considera-se que uma casca é um meio sólido definido geometricamente por uma superfície média imersa no espaço físico, e um parâmetro que representa a espessura do meio ao redor desta superfície (CHAPELLE; BATHE, 2003). Seguindo as notações na FIGURA 34, a superfície média é designada por  $\Omega_0$  na configuração de referência, também conhecido por estado indeformado. A espessura é denotada  $t$ . O mapeamento denotado  $X$  é o mapeamento entre o espaço paramétrico da superfície média, definida como  $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ , e a configuração de referência. Além disso, o vetor unitário de campo normal à superfície média é denotado por  $A_3$ . Um elemento de área da superfície média pode ser calculado como  $d\Omega_0 = J_0 d\theta^1 d\theta^2$  onde  $J_0 = \|\mathbf{X}_{,1} \times \mathbf{X}_{,2}\|$ .

FIGURA 34 – Definição de uma casca como corpo sólido.



Fonte: Adaptado de Safari e Almstedt (2017).

Nota: Mapeamento entre a configuração de referência  $\Omega_0$ , configuração atual  $\Omega$  e o espaço paramétrico  $\hat{\Omega}$

O corpo da casca, aqui denotado  $\zeta$ , encontra-se num domínio de referência tridimensional tal que  $\zeta \subset \mathbb{R}^3$ . Se uma configuração  $X_0$  é definida como o mapeamento do domínio paramétrico  $\hat{\Omega} \times [-t/2, t/2]$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser expresso por:

$$X_0(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = X(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 A_3(\theta^1, \theta^2) \quad (5.23)$$

O corpo pode ser então definido geometricamente como:

$$\zeta = \left\{ X_0 \in \mathbb{R}^3 \mid X_0(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = X(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 A_3(\theta^1, \theta^2), -\frac{t}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{t}{2}, (\theta^1, \theta^2) \in \hat{\Omega} \right\} \quad (5.24)$$

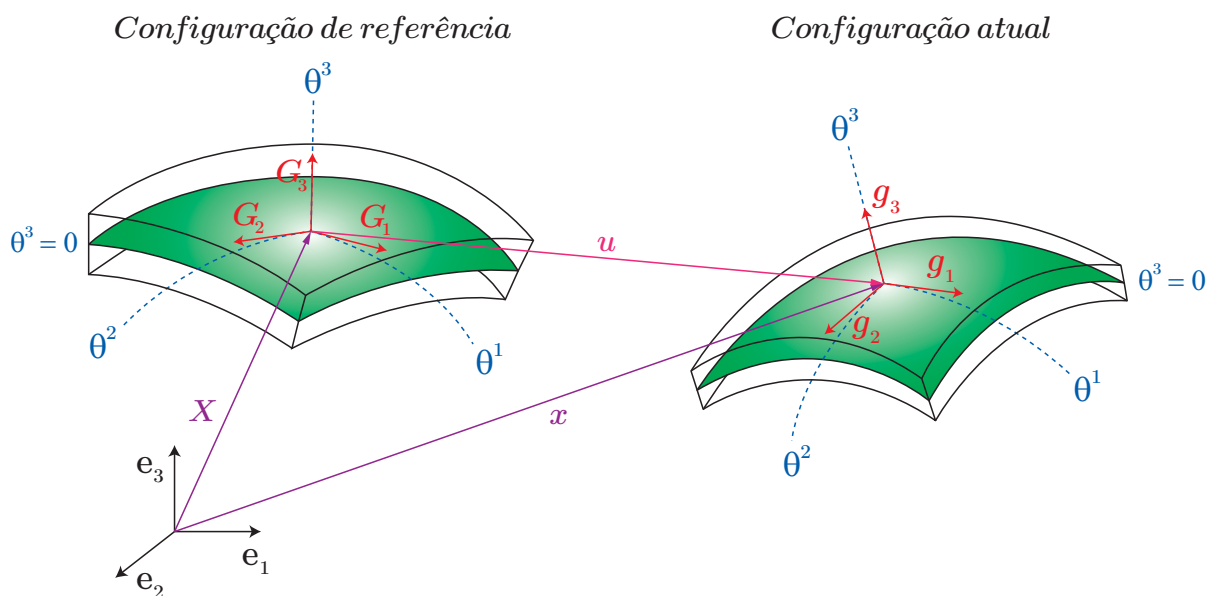
### 5.2.1 Cinemática

A cinemática descreve a deformação de um corpo. Para um ponto material no corpo, se deve distinguir entre a configuração de referência (indeformada) e a configuração atual (deformada). Todas as quantidades na configuração de referência são denotadas por letras maiúsculas, e aqueles referentes à configuração atual por letras minúsculas. De acordo com a FIGURA 34, o mapeamento entre o espaço paramétrico e a configuração atual é dado por  $x$ , e um elemento de área na superfície média na configuração atual é calculado como  $d\Omega = J d\theta^1 d\theta^2$  com  $J = \|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}\|$ .

Na FIGURA 35, o deslocamento  $\mathbf{u}$  de um ponto material é definido por seus vetores de posição na configuração atual e de referência (HOLZAPFEL, 2001):

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (5.25)$$

FIGURA 35 – Campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  de um ponto material.



Fonte: O autor.

O mapeamento de um elemento de linha diferencial na configuração de referência  $d\mathbf{X}$  num elemento de linha na configuração deformada  $d\mathbf{x}$  é descrito pelo *gradiente de deformação*  $\mathbf{F}$  (HOLZAPFEL, 2001):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (5.26)$$

O gradiente de deformação é definido pelos vetores base nas configurações de referência e atual (BASAR; WEICHERT, 2000):

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (5.27)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (5.28)$$

e pode ser usado para o mapeamento entre os vetores base da configuração atual e os vetores base da configuração de referência:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i \quad (5.29)$$

$$\mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i \quad (5.30)$$

O gradiente de deformação descreve a deformação de um corpo, incluindo movimentos de corpo rígido. Portanto, ele não pode ser usado diretamente como uma medida para as deformações. Diferentes medidas de deformação existem, e a usada nesta dissertação é relacionada ao *tensor de deformação de Green-Lagrange*  $\mathbf{E}$ . Ele descreve uma relação linear entre deslocamentos e deformações e, portanto, é uma medida apropriada para deformações sob deslocamentos pequenos. Ele é definido através do gradiente de deformação e do tensor de identidade  $\mathbf{I}$  (BASAR; WEICHERT, 2000):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.31)$$

Substituindo a Equação (5.27) em (5.31) e lembrando que o tensor identidade é idêntico ao tensor métrico  $\mathbf{I} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i$ , produz:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) \cdot (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim, os *coeficientes de deformação de Green-Lagrange*  $E_{ij}$  são calculados a partir dos *coeficientes métricos* na configuração atual e de referência:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad (5.33)$$

e se referem à base contravariante  $\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$  da configuração de referência.

### 5.2.2 Equações constitutivas

As equações constitutivas descrevem a relação entre as tensões e as deformações através de uma lei de material. Semelhante ao tensor de deformação, existem diferentes definições de tensor de tensão. Mas, para análise de tensões de corpos submetidos a pequenas deformações, é usado o *tensor de tensão de Cauchy*  $\sigma$ . Para grandes deslocamentos, outras medidas de tensão são necessárias, tais como o *primeiro e segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff* (BASAR; WEICHERT, 2000). O *tensor de tensão de Cauchy* é definido na configuração atual como:

$$\sigma = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j \quad (5.34)$$

Os tensores de tensão e deformação são relacionados pelo tensor de elasticidade  $C$ , também chamado de tensor do material. Ele é um tensor de quarta ordem, e para um material tipo *Hook* é definido como (BASAR; WEICHERT, 2000):

$$C = \lambda I \otimes I + 2\mu \Pi \quad (5.35)$$

Onde os parâmetros  $I$  e  $\Pi$  são denotados como tensor identidade de segundo ordem e o tensor identidade de quarta ordem respectivamente, e são definidos como:

$$I = G_i \otimes G^i \quad (5.36)$$

$$\Pi = G_i \otimes G_j \otimes G^i \otimes G^j = G^{im} G^{jn} G_i \otimes G_j \otimes G_m \otimes G_n \quad (5.37)$$

Nesta dissertação, é utilizado o modelo de material de *St. Venant-Kirchhoff*, o que significa que uma relação linear entre deformações e tensões é assumida:

$$\sigma = C : E \quad (5.38)$$

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (5.39)$$

Como se pode ver na Equação (5.35), para a descrição de um material elástico isotrópico, dois parâmetros independentes são suficientes. Há diferentes parâmetros usados na literatura matemática e na literatura de engenharia. Usualmente, na literatura de engenharia são utilizados o *módulo de Young*  $E$  e a *razão de Poisson*  $\nu$ , enquanto que na literatura matemática, as *constantes de Lamé*  $\lambda$  e  $\mu$  podem ser encontradas. Eles estão conectados pelas seguintes relações:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.40)$$

### 5.2.3 Equilíbrio

De acordo com o princípio da conservação do momento linear, as equações de equilíbrio (equações de movimento de Cauchy para aceleração nula) descrevem



o equilíbrio entre forças internas e externas. Se essas equações forem satisfeitas, o sistema está em equilíbrio. Na configuração de referência, o equilíbrio é formulado como (BASAR; WEICHERT, 2000):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.41)$$

Onde  $\rho_0$  é a densidade e  $\mathbf{B}$  o vetor de forças de corpo, ambos na configuração de referência.

As Equações (5.31), (5.38) e (5.41), juntamente com as condições de contorno apropriadas, representam a *forma forte do problema de valor de contorno*. Para problemas tridimensionais gerais, a forma forte do problema não pode ser resolvida exatamente e métodos de discretização são empregados, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), que também é usado nesta dissertação. No MEF, as equações de campo e as condições de contorno não são satisfeitas pontualmente, senão somente num sentido integral. A equação de equilíbrio resultante é chamada de *forma fraca do problema*. A formulação do elemento desenvolvido nesta dissertação é baseada no *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, para ser mais preciso, no *Princípio dos Deslocamentos Virtuais*, o qual considera que um deslocamento virtual pequeno infinitesimal  $\delta \mathbf{u}$  é aplicado a um sistema, a soma do trabalho virtual interno e externo, feito pelas forças internas e externas sobre o deslocamento virtual, desaparece se o sistema está em equilíbrio (WUNDERLICH; PILKEY, 2002):

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (5.42)$$

Os trabalhos virtuais interno e externo são definidos como:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{E} \, d\Omega \quad (5.43)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (5.44)$$

Onde  $\Omega$  é o domínio e  $\Gamma$  o contorno do domínio na configuração de referência e  $\mathbf{T}$  é o vetor de forças de contorno.

### 5.3 TEORIA DE CASCAS DE KIRCHHOFF-LOVE

A moderna teoria de placas remonta-se a 1850 e é creditada a *Gustav Kirchhoff* (1824-1887). Ele fez as seguintes suposições para seu modelo (OÑATE, E., 2013):

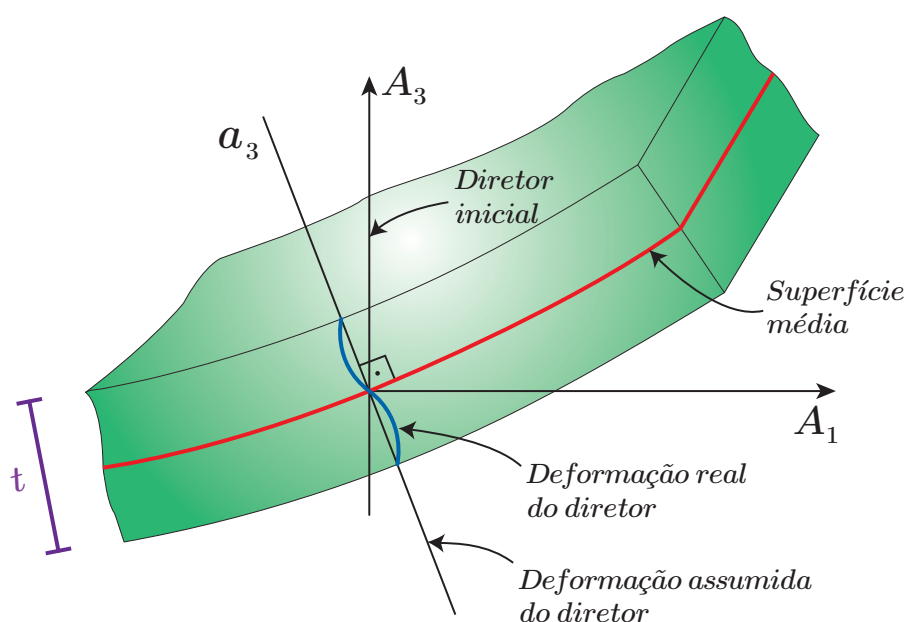
- A espessura da placa permanece constante.
- Seções transversais retas permanecem retas após a deformação.

- Seções transversais perpendiculares à superfície média permanecem perpendiculares após a deformação.

Isto foi estendido para a teoria de cascas finas em 1888 por *August E. H. Love* (1863-1940). Esta é chamada a *clássica teoria de cascas*. Já que esta é baseada nas suposições de *Kirchhoff*, o modelo tornou-se popular como o *modelo de Kirchhoff-Love*. Às vezes, também é referido na literatura como a *casca de Koiter*, em homenagem a *Warner T. Koiter*, que propôs a teoria não-linear de cascas finas novamente com base nas mesmas suposições.

Nesta dissertação, apresenta-se a *teoria de cascas de Kirchhoff-Love* baseada numa “*abordagem direta*”. Isso significa que a formulação da casca não é derivada da mecânica do contínuo tridimensional, mas a casca é considerada desde o início como uma superfície bidimensional onde se postulam suposições cinemáticas apropriadas, que representam o comportamento tridimensional. O *diretor*, que é um vetor de campo sobre a superfície média, descreve a extensão da espessura da casca.

FIGURA 36 – Deformação do vetor diretor.



Fonte: O autor.

Como consequência da abordagem direta, deformações normais e tensões na direção da espessura não são consideradas. E de acordo às já mencionadas suposições de *Kirchhoff*, as seções transversais permanecem retas durante a deformação, o que corresponde a uma distribuição linear da deformação através da espessura.

Além disso, assume-se que as seções transversais que são normais à superfície média, continuam sendo normais à superfície média na configuração deformada. Isso significa que o diretor é sempre normal à superfície média, ver [FIGURA 36](#), e como consequência a definição de um diretor independente é redundante, e a casca pode ser completamente representada por sua superfície média. Mecanicamente, a suposição de seções transversais permanecendo normais à superfície média significa que as deformações transversais de cisalhamento são omitidas. Essa é uma suposição razoável para estruturas finas. O intervalo em que essa suposição é válida, é definido pela esbelteza da casca  $R/t > 20$ , com  $R$  como o raio de curvatura e  $t$  como a espessura da casca. Portanto, a maioria das cascas em aplicações práticas pode ser classificadas como cascas finas.

Porém, a teoria de *Kirchhoff-Love* é demasiada restritiva para placas ou cascas mais espessas, onde também é importante considerar as deformações transversais de cisalhamento, que podem ser entendidas como o deslizamento das superfícies paralelas à linha central umas sobre as outras. Tais efeitos foram estudados pela primeira vez quase um século após do advento da teoria de placas, por *Eric Reissner* em 1945 e *Raymond Mindlin* em 1951 para seus modelos de placas. A ideia era ter as rotações independentes da deformação da linha central. Em outras palavras, a suposição de *Kirchhoff* das seções transversais permanecendo perpendiculares foi descartada. Mais tarde foi estendido a cascas, que são conhecidas como *cascas deformáveis por cisalhamento de primeira ordem* ou as *cascas de Reissner-Mindlin*. Trabalhos recentes de *Análise Isogeométrica de cascas baseada na teoria de Reissner-Mindlin* podem ser encontrados em [Benson, Bazilevs et al. \(2010\)](#), [Veiga et al. \(2012\)](#), [Du, Zhao e Wang \(2015\)](#) e [Dornisch, Müller e Klinkel \(2016\)](#).

Já que tanto as deformações transversais normais e as deformações de cisalhamento transversais são desprezadas, somente os coeficientes de deformação no plano são considerados e a Equação (5.31) reduz para:

$$\mathbf{E} = E_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta \quad (5.45)$$

De acordo com a Equação (5.33), os coeficientes de deformação  $E_{\alpha\beta}$  são definidos por:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}), \quad \alpha = 1, 2; \beta = 1, 2 \quad (5.46)$$

Devido à suposição de seções transversais retas, cada ponto na casca pode ser descrito pela superfície média e seu vetor normal, ver [FIGURA 35](#) e [FIGURA 36](#). Com  $t$  como a espessura da casca e  $\theta^3$  como a coordenada da espessura variando de  $(-0.5t \leq \theta^3 \leq 0.5t)$ , a superfície média é definida por  $\mathbf{x}(\theta^3 = 0)$ . Os vetores base sobre a superfície média são denotados por  $\mathbf{a}_i$  e obtidos por:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}(\theta^3 = 0) \quad (5.47)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (5.48)$$

Correspondentes às Equações (5.11) e (5.15), os coeficientes métricos e os coeficientes de curvaturas da superfície média são definidos por:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (5.49)$$

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \quad (5.50)$$

O vetor posição  $\mathbf{x}$  de um ponto na casca é então definido por:

$$\mathbf{x} = \theta^1 \mathbf{a}_1 + \theta^2 \mathbf{a}_2 + \theta^3 \mathbf{a}_3 = \theta^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad (5.51)$$

Assim derivando a Equação (5.51) com respeito a  $\theta^\alpha$  de acordo a Equação (5.3), produz os vetores base  $\mathbf{g}_\alpha$ :

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \theta^\alpha} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad (5.53)$$

e para os coeficientes métricos  $g_{\alpha\beta}$ , substituindo a Equação (5.53) na Equação (5.11):

$$g_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\beta}) \quad (5.54)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \theta^3 \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \theta^3 \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} + (\theta^3)^2 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} \quad (5.55)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \theta^3 (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}) + (\theta^3)^2 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} \quad (5.56)$$

Substituindo as Equações (5.49) e (5.50) na equação (5.56):

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} \quad (5.57)$$

Para cascas finas e moderadamente grossas, o termo quadrático com relação a  $\theta^3$  é omitido (KIENDL, 2011), o que produz tanto para a configuração atual e para a configuração referência:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} \quad (5.58)$$

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - 2\theta^3 B_{\alpha\beta} \quad (5.59)$$

Substituindo as Equações (5.58) e (5.59) na Equação (5.46) produz:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} + 2\theta^3 B_{\alpha\beta}) \quad (5.60)$$

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) + \theta^3 (B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \quad (5.61)$$

Com a última expressão, as deformações na casca são representadas pelos coeficientes métricos e os coeficientes de curvaturas da superfície média. Pode-se

mostrar que as deformações consistem de uma parte constante e uma parte linear. A parte constante descreve as deformações na superfície média e corresponde à *ação de membrana*. Correspondentemente, as deformações de membrana  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  são definidas como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \quad (5.62)$$

A parte linear (simétrica em relação à superfície média) representa a mudança na curvatura e é o *efeito da flexão*. A mudança na curvatura é denotada por  $\kappa_{\alpha\beta}$ :

$$\kappa_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad (5.63)$$

Com  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  e  $\kappa_{\alpha\beta}$ , a Equação (5.61) pode ser reescrita como:

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta} \quad (5.64)$$

A separação em ações de membrana e flexão é também aplicado às tensões, e uma integração através da espessura é desenvolvida, o que produz as tensões resultantes  $n$  para forças normais e  $m$  para momentos de flexão. Já que a distribuição de tensões através da espessura é definida como linear, uma pre-integração pode ser realizada analiticamente:

$$\sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} \quad (5.65)$$

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3 = C^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \cdot t \quad (5.66)$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha\beta} \cdot \theta^3 d\theta^3 = C^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \cdot \frac{t^3}{12} \quad (5.67)$$

Como os tensores de deformação e tensão são ambos simétricos, existem apenas três coeficientes de deformação independentes  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{12}$ , assim como três coeficientes de tensão independentes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$ . Eles podem ser reunidos em vetores, e a equação constitutiva pode ser escrita em *notação de Voigt*:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Onde  $\tilde{\mathbf{D}}$  é a *matriz do material*. Usualmente, a matriz do material é construída usando parâmetros físicos do material como o *módulo de Young*  $E$  e o *coeficiente de Poisson*  $\nu$ . Como essas quantidades se referem a unidades normalizadas (como  $m$  ou  $mm$ ), as deformações e tensões na Equação (5.68) precisam ser expressadas num sistema cartesiano de coordenadas locais. A Equação (5.19) pode ser usada para

transformar os coeficientes de deformação de  $E_{\alpha\beta}$  para  $\bar{E}_{\alpha\beta}$ , onde a barra superior significa que esses coeficientes se referem a uma base cartesiana local:

$$\bar{E}_{\gamma\delta} = E_{\alpha\beta} (\mathbf{E}_\gamma \cdot \mathbf{G}^\alpha) (\mathbf{G}^\beta \cdot \mathbf{E}_\delta) \quad (5.69)$$

Os vetores base cartesianos locais  $\mathbf{E}_\gamma$ ,  $\mathbf{E}_\delta$  são obtidos pelas Equações (5.7)-(5.9) e são indicados aqui por letras maiúsculas, para deixar claro que se referem à configuração de referência. Agora, uma matriz de material  $\mathbf{D}$  usando componentes físicas pode ser usada para calcular os coeficientes de tensão  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$ . Como para deformações, a notação de barra superior refere-se a uma base cartesiana local:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}^{11} \\ \bar{\sigma}^{22} \\ \bar{\sigma}^{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Para um material isotrópico (OÑATE, E., 2013), a matriz do material é definida como:

$$\mathbf{D}^{iso} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Com  $E$  como o módulo de Young e  $\nu$  como a razão de Poisson.

Como o tensor de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , os tensores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  são simétricos e seus coeficientes podem ser calculados usando a matriz de material e a notação de Voigt, analogamente à Equação (5.70). A barra sobre os coeficientes ( $\bar{\cdot}$ ) novamente se refere a uma base cartesiana local:

$$\begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{12} \end{bmatrix} = t \cdot \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{m}^{11} \\ \bar{m}^{22} \\ \bar{m}^{12} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} \cdot \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

A matriz do material  $\mathbf{C}$  é dada por:

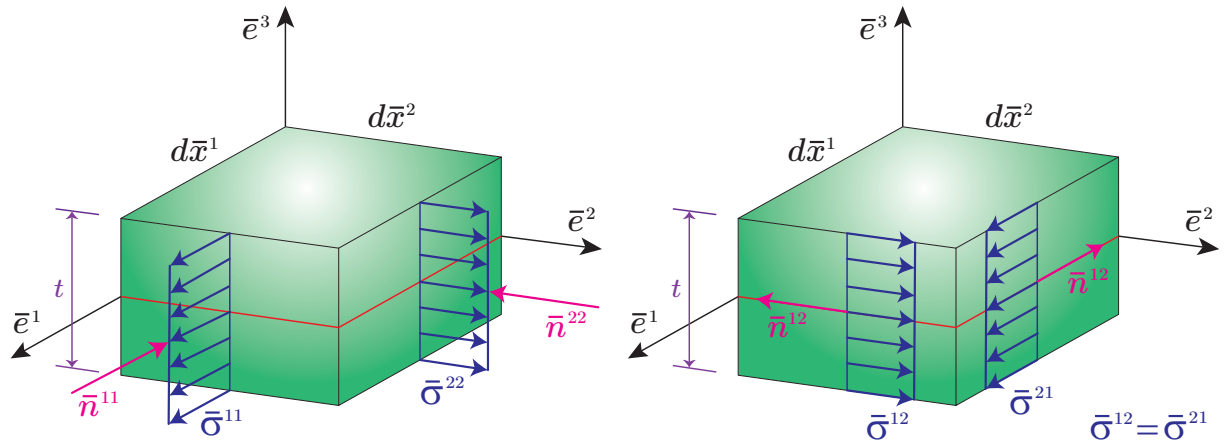
$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} (a^{11})^2 & \nu a^{11} a^{22} + (1-\nu)(a^{12})^2 & a^{11} a^{12} \\ \vdots & (a^{22})^2 & a^{22} a^{12} \\ \text{symm} & \cdots & \frac{1}{2} \left[ (1-\nu) a^{11} a^{22} + (1+\nu)(a^{12})^2 \right] \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Com as forças normais (ver FIGURA 37) e momentos de flexão (ver FIGURA 38), o trabalho virtual interno pode agora ser formulado como:

$$\delta W_{int} = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{E}) d\Omega = - \int_A (\mathbf{n} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \delta \boldsymbol{\kappa}) dA \quad (5.75)$$

Onde  $dA$  é a área diferencial da superfície média na configuração de referência. A Equação (5.75) é a *forma fraca* das equações diferenciais parciais para a *casca de Kirchhoff-Love*.

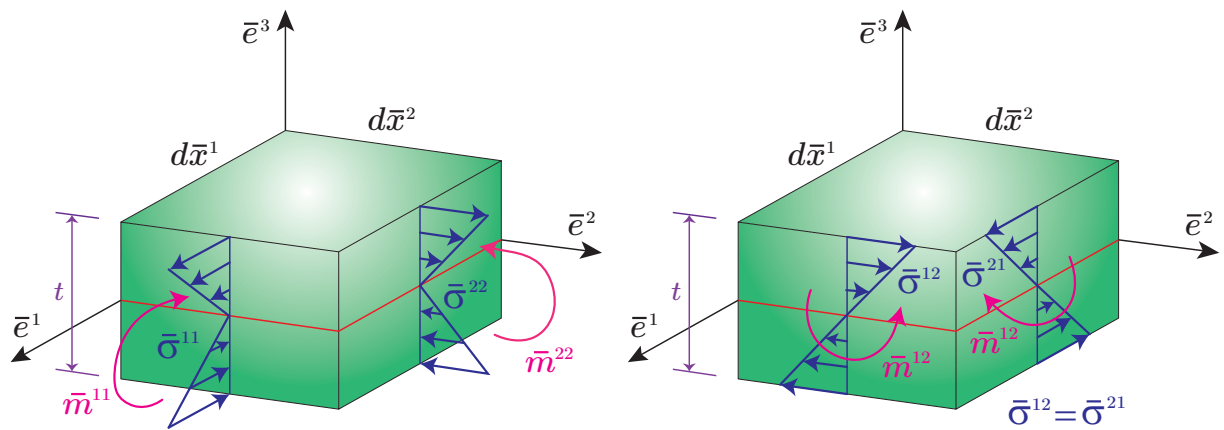
FIGURA 37 – Tensões e forças devido à ação de membrana numa casca fina.



Fonte: O autor.

Nota: As forças também são conhecidas por *tensões de membrana generalizadas no plano*.

FIGURA 38 – Tensões e momentos devido ao efeito de flexão numa casca fina.



Fonte: O autor.

Nota: Os momentos também são conhecidos por *tensões de flexão generalizadas no plano*.

## 5.4 FORMULAÇÃO DE ELEMENTO COM NURBS

Na seção 5.3, a teoria de cascas de Kirchhoff-Love foi apresentada e as correspondentes equações diferenciais foram formuladas na forma fraca. Agora, essas equações são derivadas para um sistema discretizado. As variáveis variacionais são as variáveis de deslocamento nodal (deslocamento dos pontos de controle). Esta formulação é geralmente válida para uma formulação da teoria de Kirchhoff-Love baseada em deslocamentos e não é específica para NURBS (KIENDL, 2011). Porém, a vantagem da discretização com NURBS é que uma descrição exata da superfície é fornecida e, portanto, todas as quantidades geométricas que aparecem nas equações cinemáticas podem ser avaliadas sem suposições adicionais (KIENDL; BLETZINGER et al., 2009). Isto é importante em particular para o cálculo das curvaturas.

A condição de equilíbrio do trabalho virtual deve ser cumprida para qualquer variação arbitrária das variáveis de deslocamento  $\delta u_r$ :

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_r} \delta u_r = 0 \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_r} = 0 \quad (5.77)$$

A Equação (5.77) representa um sistema de equações lineares. O trabalho virtual é definido como a soma do trabalho virtual interno e o trabalho virtual externo, Equação (5.42). O trabalho virtual interno foi formulado na Equação (5.75) e é repetido aqui para uma melhor compreensão das seguintes formulas:

$$\delta W_{int} = - \int_A (\mathbf{n} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \delta \boldsymbol{\kappa}) dA$$

Para problemas onde só pequenas deformações aparecem, é apropriado realizar uma análise geometricamente linear. No caso linear, a configuração atual é igual à configuração de referência. Já que a deformação e a mudança de curvatura são calculadas pela diferença entre a configuração atual e a configuração de referência, elas se tornam zero.

A primeira derivada do trabalho virtual externo com respeito à variável de deslocamento produz o vetor de forças externas nodais  $\mathbf{F}^{ext}$

$$\mathbf{F}^{ext} = \frac{\partial W_{ext}}{\partial u_r} \quad (5.78)$$

A segunda derivada do trabalho virtual interno com respeito às variáveis de deslocamento gera a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial u_r \partial u_s} \quad (5.79)$$



$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_s} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_r} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u_s} : \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial u_r} \right) dA \quad (5.80)$$

As Equações (5.78) e (5.80) levam ao sistema de equações típico de um problema linear:

$$\mathbf{K}^{int} \mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext} \quad (5.81)$$

Na Equação (5.80), pode-se ver que as derivadas de deformações e curvaturas com respeito às variáveis de deslocamento  $\partial u_r$  e  $\partial u_s$  são necessárias. As derivadas das forças normais e momentos podem então ser obtidas através da lei do material. Portanto, todas as quantidades cinemáticas que levam ao cálculo das deformações e curvaturas, como se apresentam na seção 5.3, se devem derivar com respeito a  $\partial u_r$  e  $\partial u_s$ . Isso é mostrado na sequência.

Seja o vetor posição, que num sistema discretizado é definido como uma combinação linear de funções de forma e valores nodais discretos que são denotados por ( $\hat{\cdot}$ ):

$$\mathbf{x} = \sum_i R^i \hat{\mathbf{x}}^i = \sum_i R^i \left( \hat{\mathbf{X}}^i + \hat{\mathbf{u}}^i \right) \quad (5.82)$$

Onde  $\hat{\mathbf{x}}^i$  e  $\hat{\mathbf{X}}^i$  são as coordenadas nodais na configuração atual e de referência, respectivamente, e  $\hat{\mathbf{u}}^i$  são os deslocamentos nodais. Aqui, todos os parâmetros se referem à superfície média da casca.

As derivadas  $\frac{\partial}{\partial u_r}$  serão indicadas como  $(\dots)_{,r}$  para uma notação mais curta. Obviamente, todas as quantidades na configuração de referência são invariantes às variações  $\partial u_r$  e, portanto, as derivadas desaparecem:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_r} = \mathbf{x}_{,r} = \sum_i R^i (\hat{\mathbf{X}}^i + \hat{\mathbf{u}}^i)_{,r} = \sum_i R^i \hat{\mathbf{u}}^i_{,r} = \sum_i R^i \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}^i}{\partial u_r} \quad (5.83)$$

Primeiro, todas as quantidades necessárias para as deformações de membrana são derivadas. Com a primeira derivada dos vetores de base, das Equações (5.47) e (5.82):

$$\mathbf{a}_{\alpha,r} = \mathbf{x}_{,\alpha,r} = \sum_i R^i_{,\alpha} \hat{\mathbf{u}}^i_{,r} \quad (5.84)$$

Obtém-se a derivada dos coeficientes métricos, da Equação (5.49):

$$a_{\alpha\beta,r} = (\mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta)_{,r} = \mathbf{a}_{\alpha,r} \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{\beta,r} \quad (5.85)$$

e finalmente a derivada dos coeficientes de deformação, da Equação (5.62):

$$\varepsilon_{\alpha\beta,r} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta})_{,r} = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta,r} \quad (5.86)$$

É mais eficiente calcular e armazenar os resultados das Equações (5.83)-(5.85) ao invés de inserir essas equações na Equação (5.86), porque elas são necessárias novamente para outras variáveis derivadas na sequência.

Para as deformações de flexão, as curvaturas têm que ser derivadas com respeito às variáveis de deslocamento  $\partial u_r$ . Estes são mais complicados que as derivadas das deformações de membrana e passos intermédios são introduzidos. Esses passos intermédios também são usados na implementação, isto é, são calculadas e armazenadas como variáveis temporais. Isso aumenta significativamente a eficiência porque essas variáveis aparecem várias vezes nas fórmulas seguintes.

Lembrando as Equações (5.50) e (5.63), a primeira derivada da mudança na curvatura com respeito  $\partial u_r$  é:

$$\kappa_{\alpha\beta,r} = (B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})_{,r} = -b_{\alpha\beta,r} = -(\mathbf{a}_{\alpha,\beta} \mathbf{a}_3)_{,r} \quad (5.87)$$

De acordo com a Equação (5.87), as derivadas de  $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$  e  $\mathbf{a}_3$  são necessárias. Adicionalmente o vetor unitário normal  $\mathbf{a}_3$ , o vetor normal não normalizado  $\tilde{\mathbf{a}}_3$  e seu comprimento  $\bar{a}_3$  são introduzidos:

$$\tilde{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \quad (5.88)$$

$$\bar{a}_3 = \sqrt{\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3} \quad (5.89)$$

E, portanto,  $\mathbf{a}_3$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_3}{\bar{a}_3} \quad (5.90)$$

Esses valores são agora derivados com respeito a  $\partial u_r$ :

$$\tilde{\mathbf{a}}_{3,r} = \mathbf{a}_{1,r} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2,r} \quad (5.91)$$

$$\bar{a}_{3,r} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,r} + \tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,r})(\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_3)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.92)$$

$$\bar{a}_{3,r} = \frac{1}{2\bar{a}_3} 2\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,r} \quad (5.93)$$

$$\bar{a}_{3,r} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_3 \tilde{\mathbf{a}}_{3,r}}{\bar{a}_3} \quad (5.94)$$

Assim derivando a Equação (5.90) com respeito a  $\partial u_r$  temos:

$$\mathbf{a}_{3,r} = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_{3,r} \bar{a}_3 - \tilde{\mathbf{a}}_3 \bar{a}_{3,r}}{\bar{a}_3^2} \quad (5.95)$$

Como pode ser visto, o resultado de (5.91) pode ser inserido em (5.94), e estes resultados, juntamente com (5.88) e (5.89), são usados para calcular a derivada de

$\mathbf{a}_{3,r}$  na Equação (5.95). A derivada de  $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$  é a seguinte:

$$\mathbf{a}_\alpha = \sum_i R^i_{,\alpha} \hat{\mathbf{u}}^i \quad (5.96)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \sum_i R^i_{,\alpha\beta} \hat{\mathbf{u}}^i \quad (5.97)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta,r} = \sum_i R^i_{,\alpha\beta,r} \hat{\mathbf{u}}^i \quad (5.98)$$

Com as Equações (5.95) e (5.98) as derivadas dos coeficientes das curvaturas podem ser calculados da Equação (5.87):

$$b_{\alpha\beta,r} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta,r} \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \mathbf{a}_{3,r} \quad (5.99)$$

E finalmente:

$$\kappa_{\alpha\beta,r} = -b_{\alpha\beta,r} \quad (5.100)$$

As equações (5.86) e (5.100) contêm as primeiras derivadas de  $\varepsilon$  e  $\kappa$  com respeito a uma variável de deslocamento. As derivadas das forças normais  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_s}$  e momentos de flexão  $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u_s}$  são obtidos através da lei do material:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_s} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{C} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_s} \quad (5.101)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u_s} = \frac{t^3}{12} \cdot \mathbf{C} : \frac{\partial \kappa}{\partial u_s} \quad (5.102)$$

Finalmente, com as Equações (5.86), (5.100), (5.101) e (5.102), são fornecidas todas as quantidades necessárias para calcular a matriz de rigidez como na Equação (5.80):

$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \int_A \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_s} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_r} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u_s} : \frac{\partial \kappa}{\partial u_r} \right) dA$$

Com a finalidade de mostrar uma forma mais clássica de obter a matriz de rigidez, desenvolve-se a expressão da Equação (5.80). Assim, obtém-se a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos, tanto para a contribuição de membrana como de flexão, denotados como  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}$  respectivamente. As funções de forma são denotadas  $R^i$  onde  $i$  é o índice da função de forma que varia de 1 até o número de pontos de controle do elemento. As contribuições de deformação são expressas em notação tensorial como:

$$\mathbf{M}_\alpha = R_{,\alpha}^i \mathbf{a}_\alpha \quad (5.103)$$

$$\mathbf{M}_3 = R_{,2}^i \mathbf{a}_1 + R_{,1}^i \mathbf{a}_2 \quad (5.104)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\alpha = & -R_{,\alpha\alpha}^i \mathbf{a}_3 + \frac{1}{J_0} [(\mathbf{a}_{\alpha,\alpha} \times \mathbf{a}_2)R_{,1}^i + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{\alpha,\alpha})R_{,2}^i] \\ & + \frac{1}{J_0} (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\alpha}) [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)R_{,1}^i + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)R_{,2}^i] \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 = & -2R_{,12}^i \mathbf{a}_3 + \frac{2}{J_0} [(\mathbf{a}_{1,2} \times \mathbf{a}_2)R_{,1}^i + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{1,2})R_{,2}^i] \\ & + \frac{2}{J_0} (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{1,2}) [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)R_{,1}^i + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)R_{,2}^i] \end{aligned} \quad (5.106)$$

Onde  $J_0 = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ . Introduzindo a notação de Voigt dá a forma final da matriz de rigidez do elemento:

$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \int_A \left[ t \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} + \frac{t^3}{12} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \right] dA \quad (5.107)$$

A matriz de rigidez de cada elemento, Equação (5.107), expressada no espaço paramétrico é:

$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ t \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} + \frac{t^3}{12} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \right] \cdot J_0 \cdot \det \mathbf{J}_{\xi,\bar{\xi}} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (5.108)$$

Agora a integração numérica para a matriz de rigidez de cada elemento é dada por:

$$\mathbf{K}_{rs}^{int} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[ t \cdot \mathbf{M}^T(\xi_n, \eta_m) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}(\xi_n, \eta_m) + \frac{t^3}{12} \cdot \mathbf{B}^T(\xi_n, \eta_m) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\xi_n, \eta_m) \right] \cdot J_0(\xi_n, \eta_m) \cdot \det \mathbf{J}_{\xi,\bar{\xi}}(\xi_n, \eta_m) \cdot W_n \cdot W_m \quad (5.109)$$

Onde  $M$  e  $N$  são o número de pontos de Gauss,  $J_0(\xi_n, \eta_m)$  é o determinante do Jacobiano,  $W_n$  e  $W_m$  são os pesos de Gauss e  $\det \mathbf{J}_{\xi,\bar{\xi}}(\xi_n, \eta_m)$  é o determinante do Jacobiano, Equação (4.3), que permite que os pontos de Gauss sejam mapeados do espaço de integração de Gauss para o espaço paramétrico.

É importante destacar que todas as fórmulas anteriores são geralmente válidas para uma formulação de casca de Kirchhoff-Love baseada em deslocamentos e não é específica para a discretização com NURBS. Como as curvaturas  $\kappa$  contêm as segundas derivadas da descrição geométrica, o índice variacional é dois, e, portanto, continuidade  $C^1$  entre os elementos é necessário para cumprir as condições de compatibilidade. Isso geralmente não é possível usando polinômios de Lagrange como funções de base. Para elementos bilineares, que são os elementos de casca mais comuns, é obvio que a continuidade  $C^1$  entre elementos não é possível. Com elementos de Lagrange de ordem superior, a continuidade  $C^1$  entre todos os elementos

só pode ser obtida para formas regulares, mas não para superfícies arbitrárias de forma livre. Esta é a razão porque as formulações baseadas em Kirchhoff-Love são menos difundidas em elementos finitos do que os elementos de Reissner-Mindlin. Na formulação de casca de Reissner-Mindlin, onde a deformação de cisalhamento transversal é levada em consideração, o índice variacional é um e, portanto, a continuidade  $C^0$  entre os elementos é suficiente. Como foi mostrado nos capítulos anteriores, as funções de base NURBS oferecem continuidade  $C^1$  e maiores continuidades entre os elementos e, portanto, a formulação de cascas de Kirchhoff-Love, como foi apresentada acima, pode ser implementada sem modificações adicionais.

## 5.5 RECUPERAÇÃO DE TENSÕES

A formulação desenvolvida na seção 5.4 é uma formulação baseada em deslocamentos, onde os resultados são os deslocamentos dos pontos de controle. Isso significa que a análise gera como resultado a configuração deformada da geometria. Outras importantes quantidades de interesse na análise estrutural são as *tensões e as tensões resultantes (forças e momentos)*, ver FIGURA 37 e FIGURA 38. O cálculo das tensões a partir dos deslocamentos obtidos é chamado de *recuperação de tensões*.

Para o modelo de casca de Kirchhoff-Love apresentado nesta dissertação, as quantidades de interesse são as tensões  $\sigma$  e as deformações  $\varepsilon$  no plano. Os coeficientes de tensão  $\sigma^{ij}$  da Equação (5.34), referem-se à base atual  $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$  (coordenadas curvilíneas) que em geral não são normalizados e, portanto, estes valores não são expressados em unidades normalizadas (por exemplo  $N/mm^2$ ). Assim, eles são transformados num sistema de coordenadas cartesianas locais na configuração atual  $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ , de acordo ao seguinte procedimento:

Primeiramente, tensões  $\sigma$  e deformações  $\varepsilon$  são expressados inicialmente em coordenadas curvilíneas (como resultado da análise estrutural) por:

$$\sigma = \sigma^{ij} (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \quad (5.110)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j) \quad (5.111)$$

Em segundo lugar, os vetores base do sistema de coordenadas cartesianas locais são obtidos com as Equações (5.7)-(5.9), eles são repetidos aqui para melhor compreensão:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad (5.112)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1\|} \quad (5.113)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3 \quad (5.114)$$

Adicionalmente, são necessários os vetores base contravariantes para isso relembremos as Equações (5.6) e (5.13), as quais são repetidas aqui:

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad (5.115)$$

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 \quad (5.116)$$

Onde das Equações (5.11) e (5.12), temos que  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$  e  $[a^{\alpha\beta}] = [a_{\alpha\beta}]^{-1}$ .

Então, as tensões e deformações em coordenadas cartesianas locais podem se expressadas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (5.117)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{ij} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) \quad (5.118)$$

Igualando-se as Equações (5.110) e (5.111) com (5.117) e (5.118) respectivamente:

$$\sigma^{ij} (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) = \hat{\sigma}^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (5.119)$$

$$\varepsilon_{ij} (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j) = \hat{\varepsilon}_{ij} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) \quad (5.120)$$

Agora a Equação (5.119) é multiplicada pelos vetores base contravariantes  $\mathbf{e}^k$  e  $\mathbf{e}^l$  por ambos lados, também a Equação (5.120) é multiplicada pelos vetores base covariantes  $\mathbf{e}_k$  e  $\mathbf{e}_l$ :

$$\sigma^{ij} \mathbf{e}^k (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \mathbf{e}^l = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{e}^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^l \quad (5.121)$$

$$\varepsilon_{ij} \mathbf{e}_k (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j) \mathbf{e}_l = \hat{\varepsilon}_{ij} \mathbf{e}_k (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) \mathbf{e}_l \quad (5.122)$$

Fazendo uso de propriedades tensoriais e usando o fato que vetores base covariantes e contravariantes são relacionados por  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ , as tensões e deformações num sistema de coordenadas cartesianas locais ficam definidas por:

$$\hat{\sigma}^{kl} = \sigma^{ij} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{a}_i) (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{e}^l) \quad (5.123)$$

$$\hat{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon_{ij} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{a}^i) (\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{e}_l) \quad (5.124)$$

Para um bom entendimento se desenvolveu todo o procedimento para obter as tensões e deformações num sistema de coordenadas cartesianas locais, mas também foi possível usar as Equações (5.19) para as deformações e (5.22) para as tensões e assim obter os mesmos resultados. Este procedimento de transformações para as tensões pode ser aplicado de forma equivalente às tensões resultantes (forças e momentos). Isto significa que  $\bar{\mathbf{n}}^{\alpha\beta}$  e  $\bar{\mathbf{m}}^{\alpha\beta}$  podem ser calculados de acordo com as Equações (5.72) e (5.73), e depois transformados ao sistema de coordenadas cartesianas locais como  $\hat{\mathbf{n}}^{\alpha\beta}$  e  $\hat{\mathbf{m}}^{\alpha\beta}$  pelo procedimento mostrado acima, assim temos:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{n}} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{m}} \quad (5.125)$$

Onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}^1) & (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^1) & 2(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^1) \\ (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}^2) & (\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^2) & 2(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^2) \\ (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}^2) & (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^2) & (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^2) + (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}^2) \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

Com as forças normais e momentos de flexão, as tensões no plano  $\hat{\sigma}^{\alpha\beta}$  podem ser determinadas em qualquer ponto na casca com as seguintes expressões:

$$\hat{\sigma}^{11} = \frac{\hat{n}^{11}}{t} - \frac{12\hat{m}^{11}}{t^3}\theta^3 \quad (5.127)$$

$$\hat{\sigma}^{22} = \frac{\hat{n}^{22}}{t} - \frac{12\hat{m}^{22}}{t^3}\theta^3 \quad (5.128)$$

$$\hat{\sigma}^{12} = \frac{\hat{n}^{12}}{t} - \frac{12\hat{m}^{12}}{t^3}\theta^3 \quad (5.129)$$

Onde  $t$  é a espessura da casca e  $\theta^3$  como a coordenada da espessura variando de  $(-0.5t \leq \theta^3 \leq 0.5t)$ .

Assim mesmo, pode-se calcular as *tensões principais* fazendo uso da seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}_{min}^{max} = \frac{1}{2} \left[ (\hat{\sigma}^{11} + \hat{\sigma}^{22}) \pm \sqrt{(\hat{\sigma}^{11} - \hat{\sigma}^{22})^2 + 4(\hat{\sigma}^{12})^2} \right] \quad (5.130)$$

## 5.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO EM MODELOS DE CASCAS COM AIG

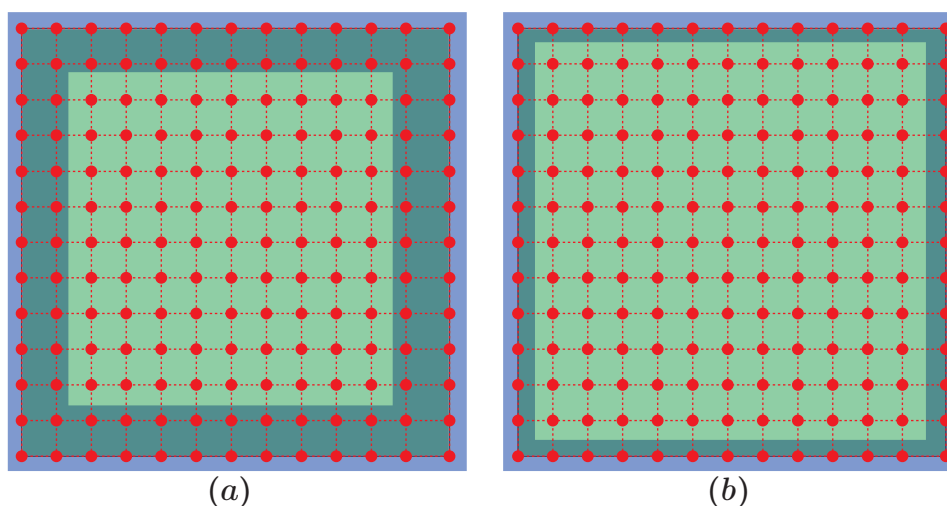
Considerando a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF), a aplicação das condições de contorno é realmente direta. Se for necessário definir algum valor para um deslocamento ou rotação de um nó, é apenas uma questão de definir o respectivo grau de liberdade para o valor desejado. Considerando a AIG, os graus de liberdade estão localizados nos pontos de controle. A natureza não interpolatória das funções NURBS pode criar algumas dificuldades na imposição das condições de contorno. Porém, é conhecido que, para os vetores de nós abertos, os nós dos extremos são interpoláveis, o que é muito importante, dado que a aplicação de restrições nesse domínio pode ser tão trivial como no MEF para condições de contorno homogêneas.

É uma vantagem da casca de Kirchhoff-Love baseada em NURBS, que esta não precisa de graus de liberdade de rotação. Porém, há casos em que as rotações devem ser prescritas no contorno da casca, por exemplo, no caso de bordas engastadas, condições de simetria e o acoplamento de patches. Em todos esses casos, além do deslocamento, também a inclinação da superfície deve ser prescrita ao longo do contorno. Como foi explicado na Subseção 3.4.2, as inclinações no contorno de uma superfície NURBS são determinadas pelas duas primeiras filas de pontos de controle desse contorno. Para uma borda engastada, isso significa que os graus de

liberdade das duas primeiras filas de pontos de controle dessa borda devem ser fixados (deslocamento igual a zero). É importante observar que isso não introduz um suporte dentro da casca, senão que somente concerne às condições de suporte no contorno. E para uma borda simplesmente apoiada só precisa-se fixar os graus de liberdade dos pontos de controle do contorno. Esses dois casos podem ser vistos na [FIGURA 39](#).

Para condições de simetria, as duas primeiras filas de pontos de controle devem ser acopladas de modo que a inclinação permaneça constante. Em outras palavras às vezes é necessário impor uma rotação igual zero junto com um deslocamento diferente de zero num contorno. Nesse caso, os graus de liberdade não podem ser fixados (deslocamento igual a zero), senão eles devem ser forçados a se mover da mesma maneira. Por exemplo, pode ser necessário garantir que os graus de liberdade  $x$  e  $z$  de cada ponto de controle na segunda fila se movam da mesma maneira que o vizinho na primeira fila. Além disso, a questão de como aplicar condições em bordas arbitrariamente curvas que não estão num mesmo plano, também deve ser abordada. Nestes casos, simplesmente fixar os graus de liberdade não é suficiente. Ambos problemas podem ser resolvidos com os métodos típicos de imposição de restrições do clássico MEF. Estes incluem, por exemplo, o *método de multiplicadores de Lagrange* ou o *método de penalização* ([FELIPPA, 2004](#)), este último é aplicado nos exemplos do próximo capítulo. A mesma ideia vale para o acoplamento de patches NURBS para estruturas multipatch.

FIGURA 39 – Placa modelada com NURBS para condições de contorno engastado e simplesmente apoiado.



Fonte: O autor.

(a) Placa com contornos engastados, onde as duas primeiras filas de pontos de controle são fixadas (deslocamento vertical igual a zero). (b) Placa com contornos simplesmente apoiados, onde somente os pontos de controle do contorno são fixados.



## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, a formulação de casca apresentada é testada com uma série de exemplos de referência bem conhecidos, com comportamento geométrico e do material linear, com a finalidade de avaliar a robustez e precisão de cascas sob estados de deformação complexos. Estes exemplos são: *a cobertura de Scordelis-Lo, o cilindro comprimido com diafragmas, a casca hemisférica e a casca cilíndrica com pressão interna*. A descrição desses problemas se encontra em [Belytschko et al. \(1985\)](#), [Macneal e Harder \(1985\)](#) e [Hughes, Bazilevs e Cottrell \(2009\)](#).

A convergência é determinada comparando-se o deslocamento de certos pontos nas cascas com soluções do clássico MEF e soluções de referência apresentadas em [Belytschko et al. \(1985\)](#), [Macneal e Harder \(1985\)](#) e [Hughes, Bazilevs e Cottrell \(2009\)](#). O estudo de convergência é realizado fazendo uso de diferentes refinamentos da malha (1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 elementos por borda) e diferentes ordens polinomiais ( $p = q = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ). Além disso, a convergência do erro também é avaliada com a energia de deformação. Nos três primeiros exemplos são apresentados os resultados para um único *Patch* e para o último exemplo são apresentados os resultados do uso de *Multipatch* de acordo com o enfoque de [J. Kiendl et al. \(KIENDL; BAZILEVS et al., 2010\)](#) ([KIENDL, 2011](#)).

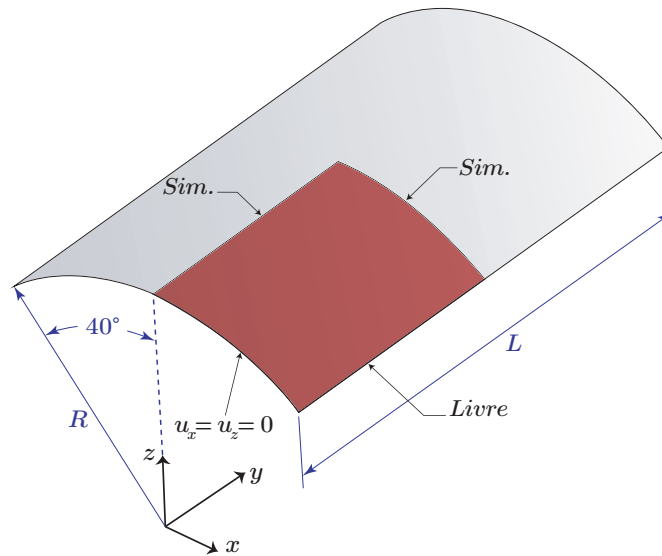
### 6.1 COBERTURA DE SCORDELIS-LO

#### 6.1.1 Configuração do problema

A cobertura de Scordelis-Lo é uma seção de uma casca cilíndrica de concreto com peso próprio, onde suas duas bordas curvas estão apoiadas em diafragmas rígidos (restringindo os deslocamentos verticais em  $z$  e horizontais em  $x$ ) e as outras duas bordas estão livres. A cobertura está submetida a uma carga gravitacional uniforme. A configuração do problema está representada na [FIGURA 40](#). O deslocamento vertical no ponto médio da borda lateral livre é dado como a solução de referência  $u_{ref} = 0.3024 \text{ m}$  de acordo com [Macneal e Harder \(1985\)](#) e [Belytschko et al. \(1985\)](#). Devido à simetria, apenas um quarto da geometria é modelada. A resposta do sistema deste exemplo numérico é dominada pela ação de membrana e flexão. Nos apoios, a estrutura permite um movimento na direção longitudinal e todas as rotações.

Os parâmetros para o problema são dados na [TABELA 2](#).

FIGURA 40 – Cobertura de Scordelis-Lo.



Fonte: O autor.

Nota: A cobertura está sujeita a um peso próprio de 90.0 por unidade de área. Os extremos são apoiados mediante diafragmas rígidos.

TABELA 2 – Cobertura de Scordelis-Lo. Parâmetros para o modelo.

Variável	Valor	Unidade
Modulo de Young, $E$	$4.32 \cdot 10^8$	$[kN/m^2]$
Razão de Poisson, $\nu$	0.00	$[-]$
Espessura da casca, $t$	0.25	$[m]$
Ângulo, $\varphi$	80	$[^\circ]$
Raio, $R$	25.0	$[m]$
Comprimento, $L$	50.0	$[m]$
Carga gravitacional, $Q$	90	$[kN/m^2]$

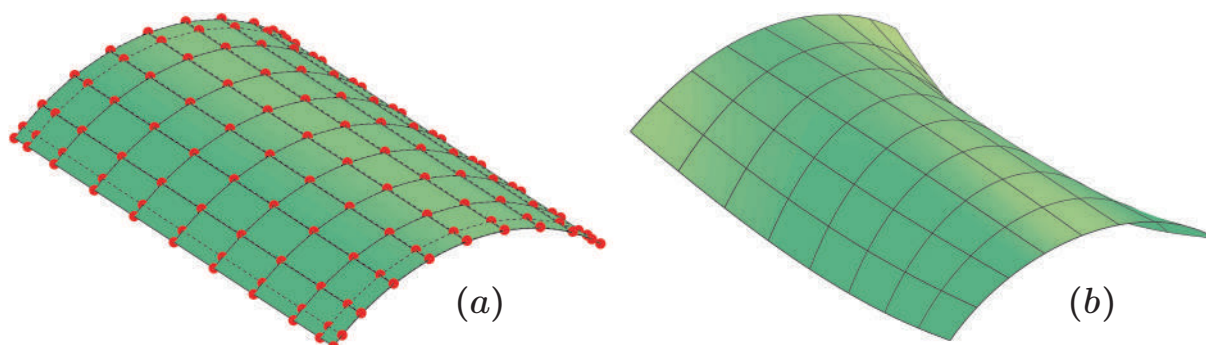
Fonte: O autor.

### 6.1.2 Verificação de resultados

Na FIGURA 41(a) mostra-se a geometria inicial completa da cobertura (configuração indeformada) gerada com NURBS de grau  $p = q = 3$ , e na FIGURA 41(b) pode se ver a configuração deformada da cobertura com um fator de escala dos deslocamentos de 15.

A FIGURA 42 mostra a convergência do deslocamento vertical no ponto médio da borda livre para diferentes ordens polinomiais e a solução de referência. A solução de convergência obtida é aproximadamente  $u = 0.3006 \text{ m}$ , que é ligeiramente inferior ao valor de referência  $u_{ref} = 0.3024 \text{ m}$  dado em Macneal e Harder (1985) em torno de 0.6%. A razão para os diferentes resultados é o tratamento diferente das deformações de cisalhamento nas respectivas formulações: na solução de referência, foi considerada

FIGURA 41 – Cobertura de Scordelis-Lo. Configurações indeformada e deformada.



Fonte: O autor.

Nota: (a) Modelagem da cobertura com NURBS. (b) Configuração deformada com fator de escala dos deslocamentos de 15.

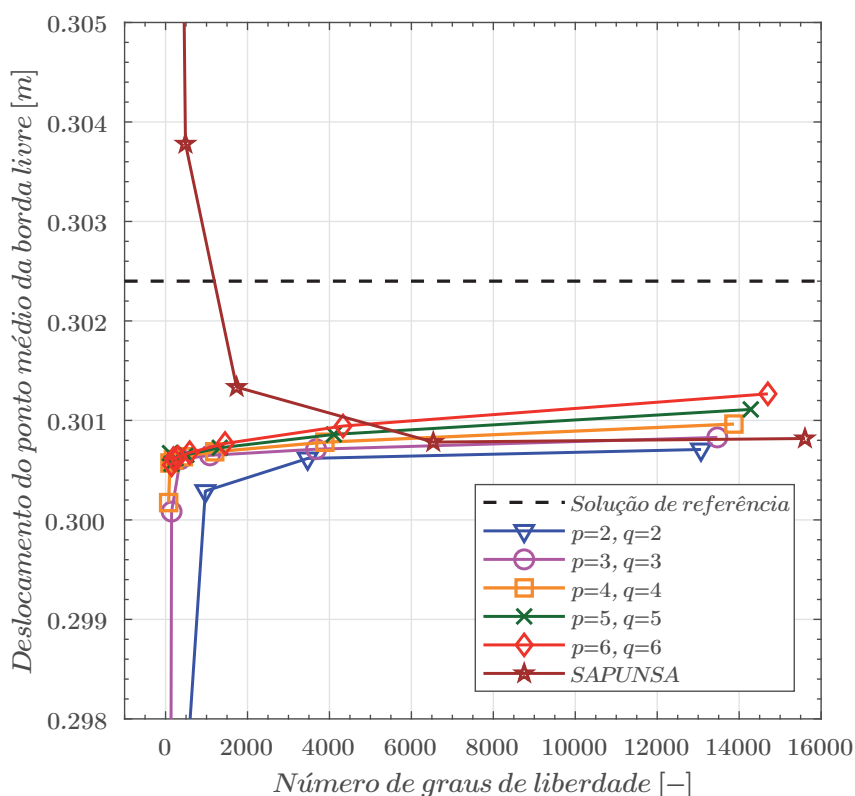
uma teoria com deformação por cisalhamento enquanto a presente formulação é baseada na teoria de Kirchhoff-Love que despreza as deformações de cisalhamento transversais. Para todas as ordens polinomiais, a convergência é bastante rápida. Para funções NURBS de ordem quártica, no segundo passo de refinamento já produz a solução convergente.

Assim mesmo, com a finalidade de fazer a comparação com modelos de AEF se faz uso do programa de cálculo estrutural *SAPUNSA* o qual é baseado no clássico MEF. Este foi desenvolvido pelo autor da presente dissertação em [García e Frisancho \(2010\)](#). O programa *SAPUNSA* usa um elemento casca quadrilátero de quatro nós que é construído como a combinação dos elementos de membrana e placa. O elemento membrana apresenta graus de liberdade de rotação [Ibrahimbegovic \(1990\)](#), o qual faz uma interpolação tipo *Allman* para o campo de deslocamentos juntamente com uma interpolação independente do campo de rotação, fazendo uso também de uma formulação de penalização tipo deslocamento com integração seletiva. E o elemento placa com modos incompatíveis proposto em [Ibrahimbegović \(1993\)](#), está baseado na teoria *Reissner-Mindlin*, com uma interpolação hierárquica do deslocamento e um campo de deformação por cisalhamento assumida. Assim este elemento placa pode ser usado como um equivalente ao elemento placa de *Kirchhoff-Love* numa análise de placas finas.

Os gráficos dos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente são dados na [FIGURA 43-45](#). A solução da AIG é dada à esquerda e a solução da AEF à direita. Os gráficos dos deslocamentos se correlacionam bem. Com os deslocamentos corroborados, as tensões de membrana e flexão generalizadas no plano são comparadas. Os resultados do modelo da AIG para as tensões de membrana generalizada são mostrados à esquerda da [FIGURA 46-48](#). Os gráficos correspondentes para o modelo

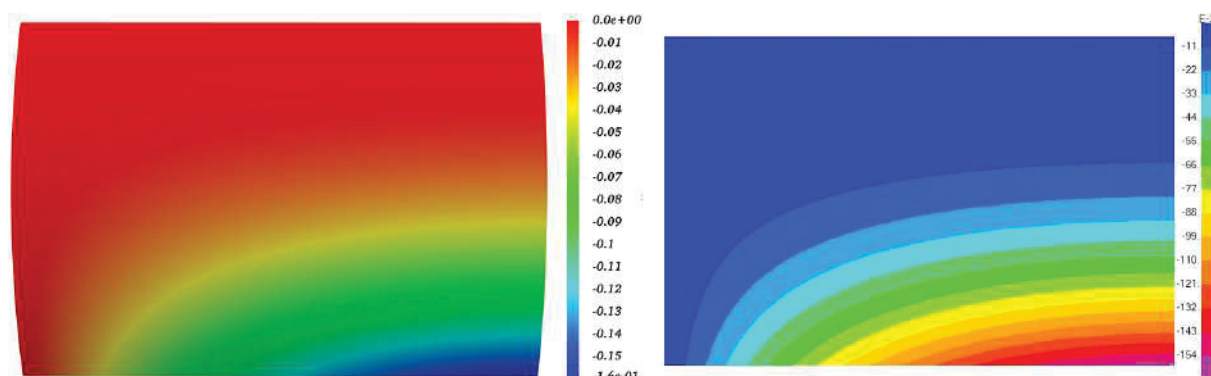
de casca com AEF são representados à direita. A correlação entre os modelos é boa. Gráficos equivalentes, mas para tensões de flexão generalizada no plano são dados na FIGURA 49-51. Novamente, a correlação é forte e os valores correspondem bem à solução obtida com AEF. Aqui, a solução com AEF é obtida com o software *SAP2000™*. Observe que os mapas de cores não correspondem exatamente. Diferenças em valores extremos são resultado do mapeamento de cores.

FIGURA 42 – Cobertura de Scordelis-Lo. Convergência do deslocamento vertical no ponto médio da borda livre.



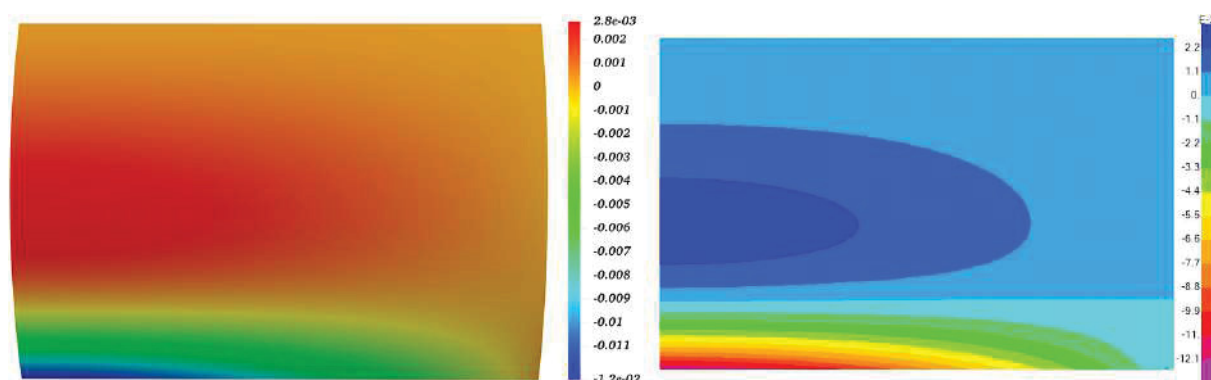
Fonte: O autor.

FIGURA 43 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global  $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



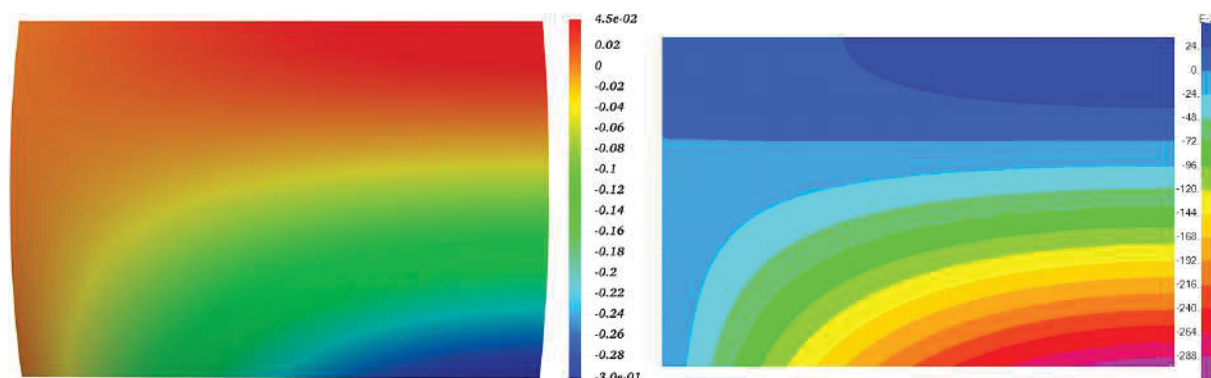
Fonte: O autor.

FIGURA 44 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global  $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



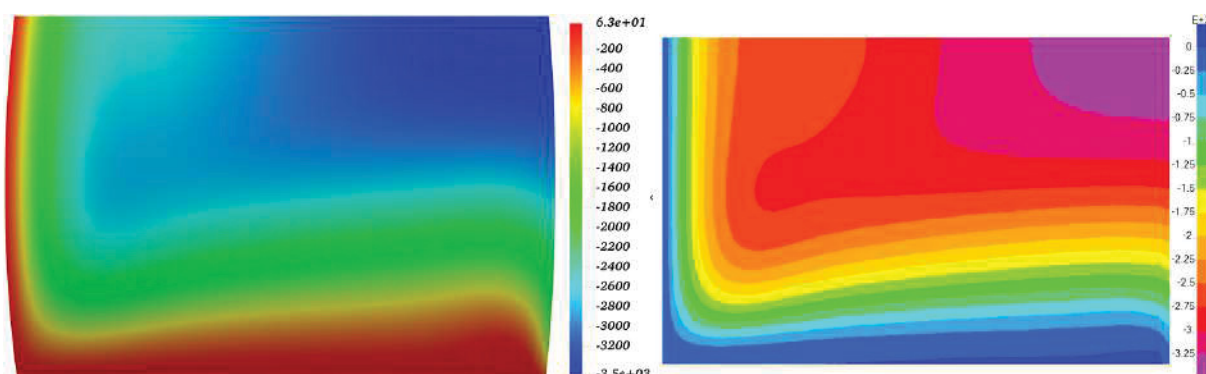
Fonte: O autor.

FIGURA 45 – Cobertura de Scordelis-Lo. Deslocamento na direção global  $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



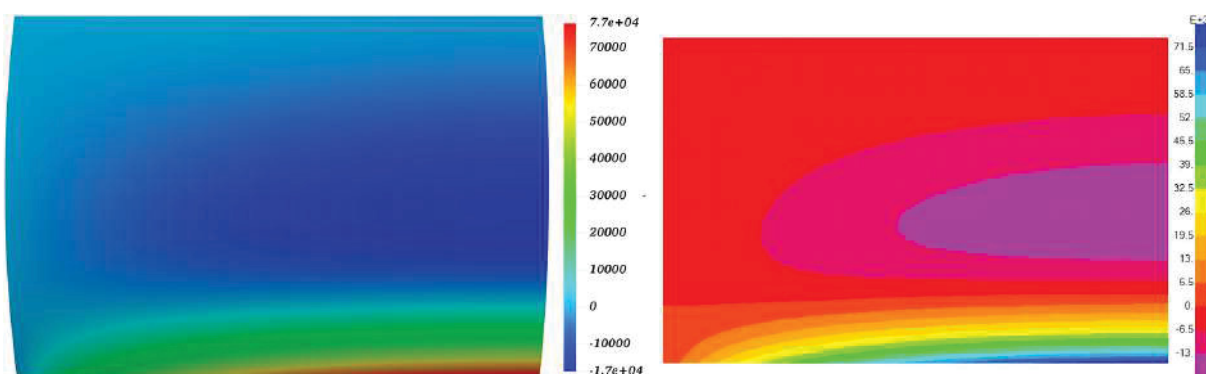
Fonte: O autor.

FIGURA 46 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



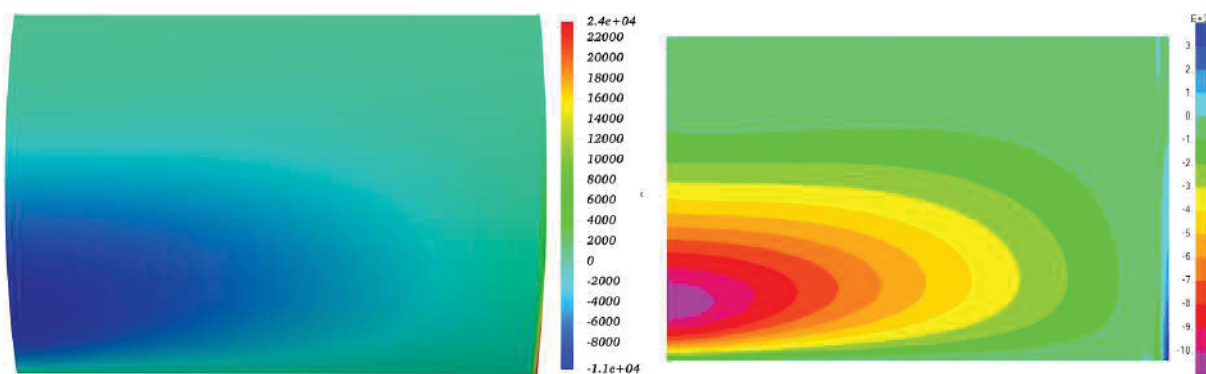
Fonte: O autor.

FIGURA 47 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

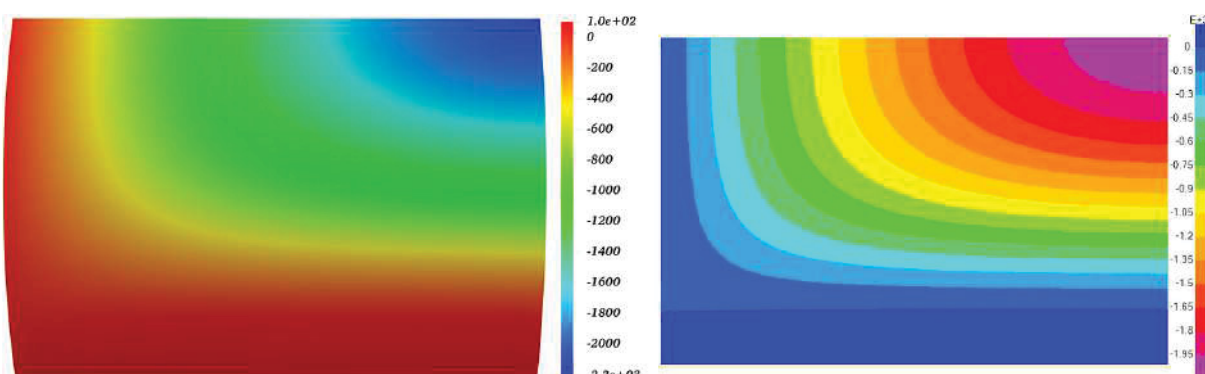
FIGURA 48 – Cobertura de Scordelis-Lo. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

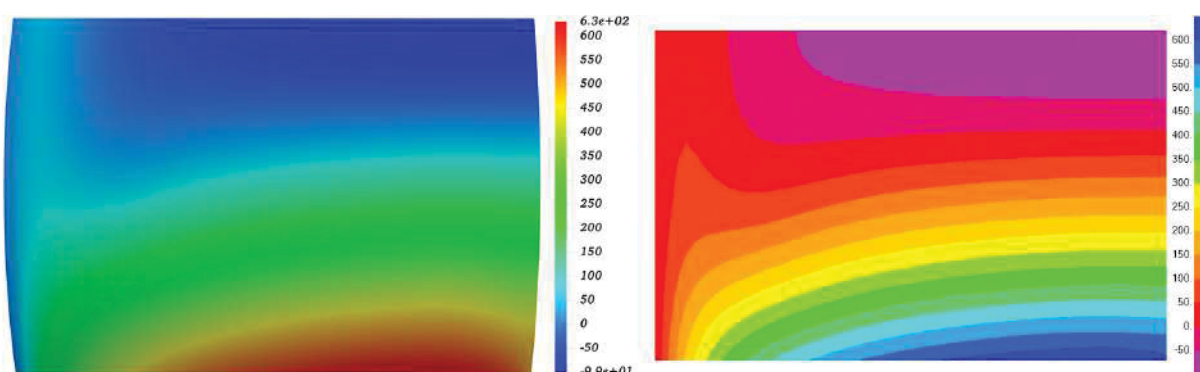


FIGURA 49 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



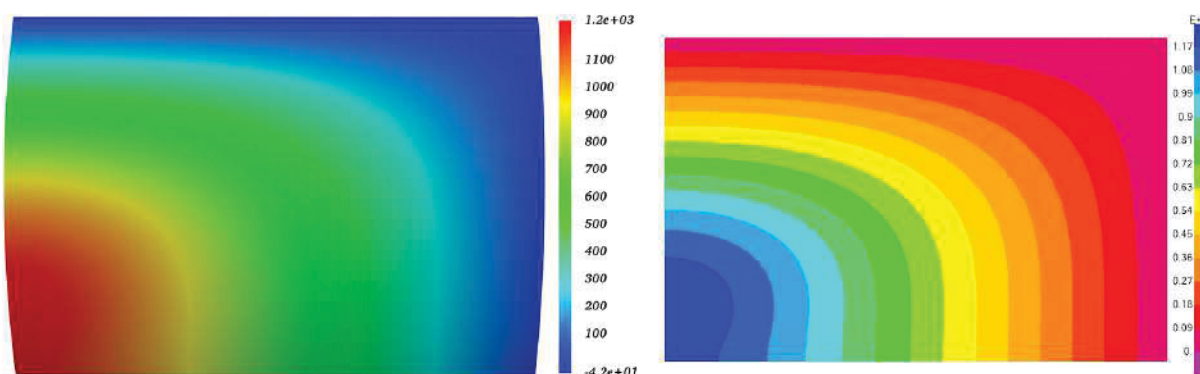
Fonte: O autor.

FIGURA 50 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

FIGURA 51 – Cobertura de Scordelis-Lo. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



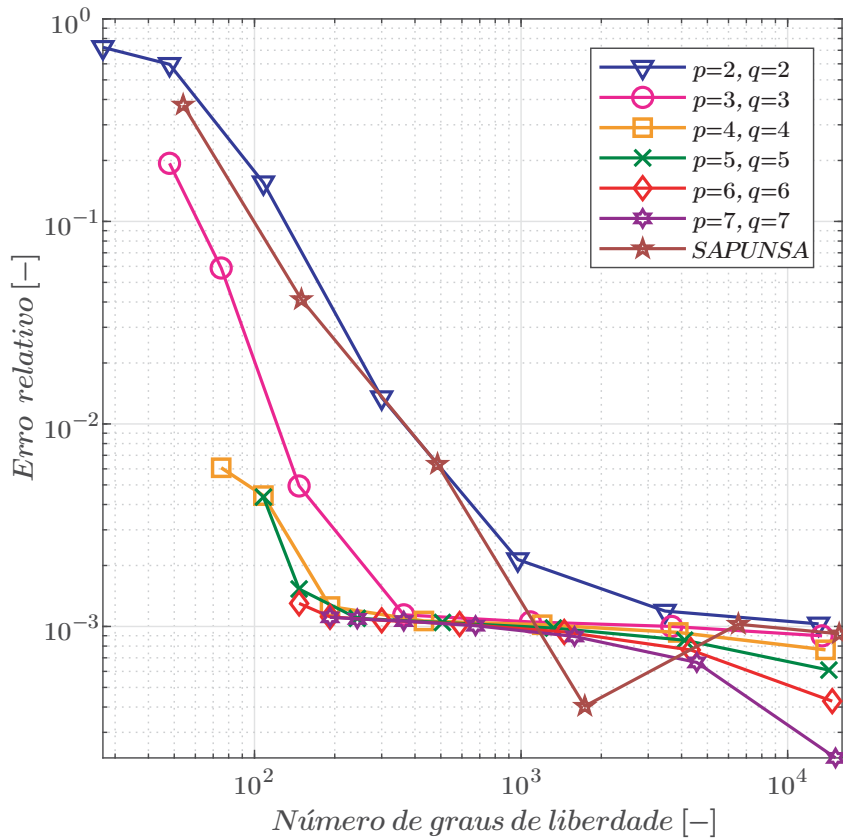
Fonte: O autor.



### 6.1.3 Comparação de precisão e razão de convergência

A base para a comparação é dada pelo *erro relativo na energia de deformação* versus o número de graus de liberdade. Para o modelo de AEF é usado o programa *SAPUNSA* fazendo uso de uma malha quadrilateral. Para o modelo da AIG, seis resultados são produzidos. Os graus polinomiais variam de  $p = 2$  a  $p = 7$  e  $q = 2$  a  $q = 7$ .

FIGURA 52 – Cobertura de Scordelis-Lo. Comparação entre os modelos de AEF e AIG.



Fonte: O autor.

Para a comparação quantitativa, considera-se a *energia de deformação* da solução:

$$E = \frac{1}{2} \|u\|^2 \quad (6.1)$$

$$\| \cdot \| = \sqrt{a(\cdot, \cdot)} \quad (6.2)$$

Onde  $a(\cdot, \cdot)$  pertence à “*energia*” produto do equilíbrio mecânico. Para uma aproximação discreta, tem-se:

$$E_h = \frac{1}{2} a(u_h, u_h) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (6.3)$$

Com  $h$  denotando a solução aproximada e  $ref$  a solução de referência analítica, o erro relativo pode ser expresso como:

$$e_{ref} = \left| \frac{E_{ref} - E_h}{E_{ref}} \right| \quad (6.4)$$

Na FIGURA 52, pode-se observar que para graus polinomiais maiores a 2 ( $p, q > 2$ ) as soluções da AIG superam à solução da AEF em termos de precisão e razão de convergência. Agora no caso da solução da AIG com  $p = q = 2$  se observa que inicialmente tem uma precisão e razão de convergência muito similar à solução da AEF. Isto acontece porque o modelo apresenta problemas substanciais de bloqueio devido ao baixo grau dos polinômios. Mas mesmo assim, os resultados conforme se vão fazendo o refinamento não são nada desprezáveis. Em termos gerais, pode-se afirmar que o modelo com AIG mostra precisão e razão de convergência crescentes à medida que o refinamento  $k$  é realizado e graus polinomiais maiores são obtidos.

## 6.2 CILINDRO COMPRIMIDO

### 6.2.1 Configuração do problema

O segundo exemplo numérico é um cilindro apoiado em diafragmas rígidos nos extremos e submetido a duas cargas pontuais opostas no meio, como é mostrado na FIGURA 53. A solução de referência  $u_{ref} = 1.8248 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  é dada como o deslocamento radial nos pontos de aplicação das cargas pontuais (BELYTSCHKO et al., 1985). Este é um teste severo tanto para os modos de flexão inextensíveis e estados de membrana complexos (BELYTSCHKO et al., 1985). Devido à simetria, apenas um oitavo da geometria é modelada.

Os parâmetros para o problema são dados na TABELA 3.

TABELA 3 – Cilindro comprimido. Parâmetros para o modelo.

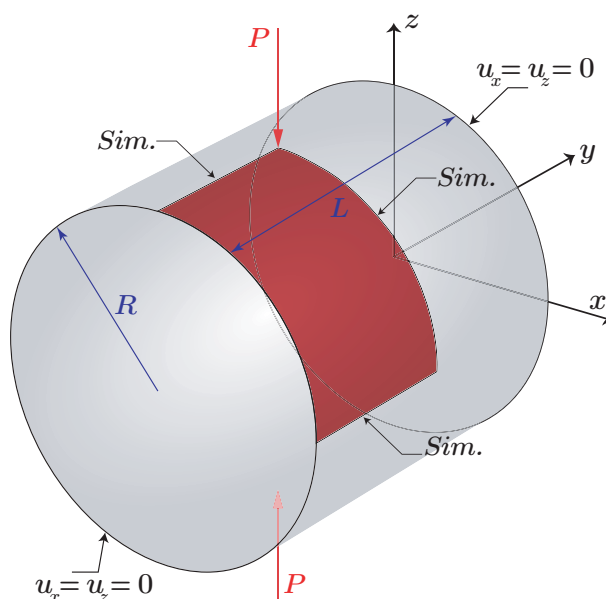
Variável	Valor	Unidade
Modulo de Young, $E$	$3.0 \cdot 10^6$	$[kN/cm^2]$
Razão de Poisson, $\nu$	0.30	$[-]$
Espessura da casca, $t$	3.0	$[cm]$
Raio, $R$	300	$[cm]$
Comprimento, $L$	600	$[cm]$
Carga pontual, $P$	$\pm 1.0$	$[kN]$

Fonte: O autor.

### 6.2.2 Verificação de resultados

Na FIGURA 54(a) mostra-se a geometria inicial completa do cilindro (configuração indeformada) gerada com NURBS de grau  $p = q = 3$ , e na FIGURA 54(b) pode se

FIGURA 53 – Cilindro comprimido.

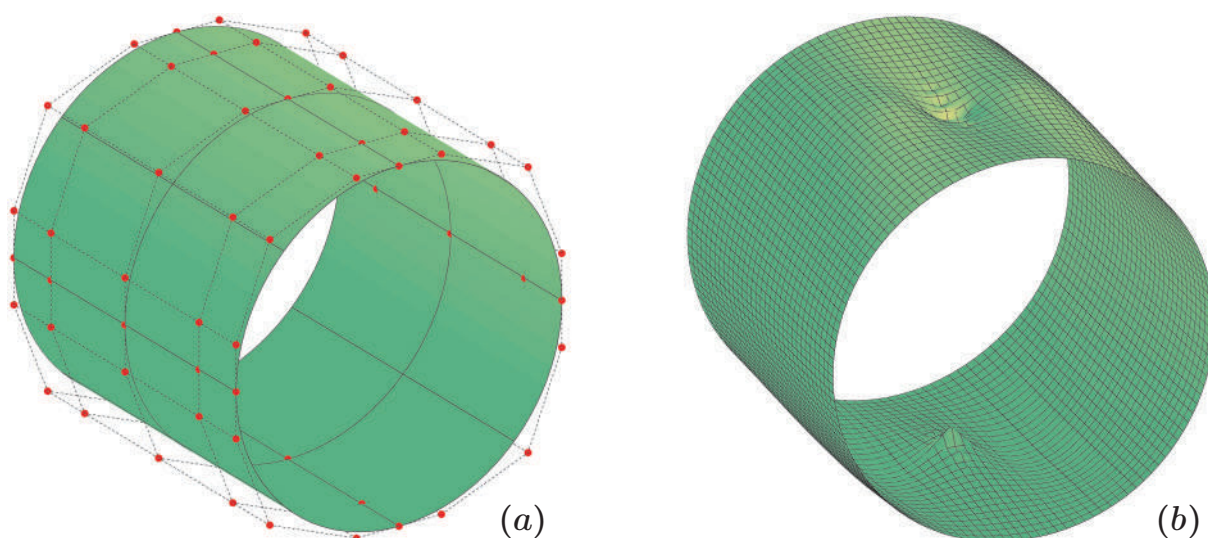


Fonte: O autor.

Nota: O cilindro é submetido a forças concentradas iguais e opostas no meio. Os extremos são restringidos por diafragmas rígidos.

ver a configuração deformada do cilindro com um fator de escala dos deslocamentos de  $3 \cdot 10^6$ .

FIGURA 54 – Cilindro comprimido. Configurações indeformada e deformada.

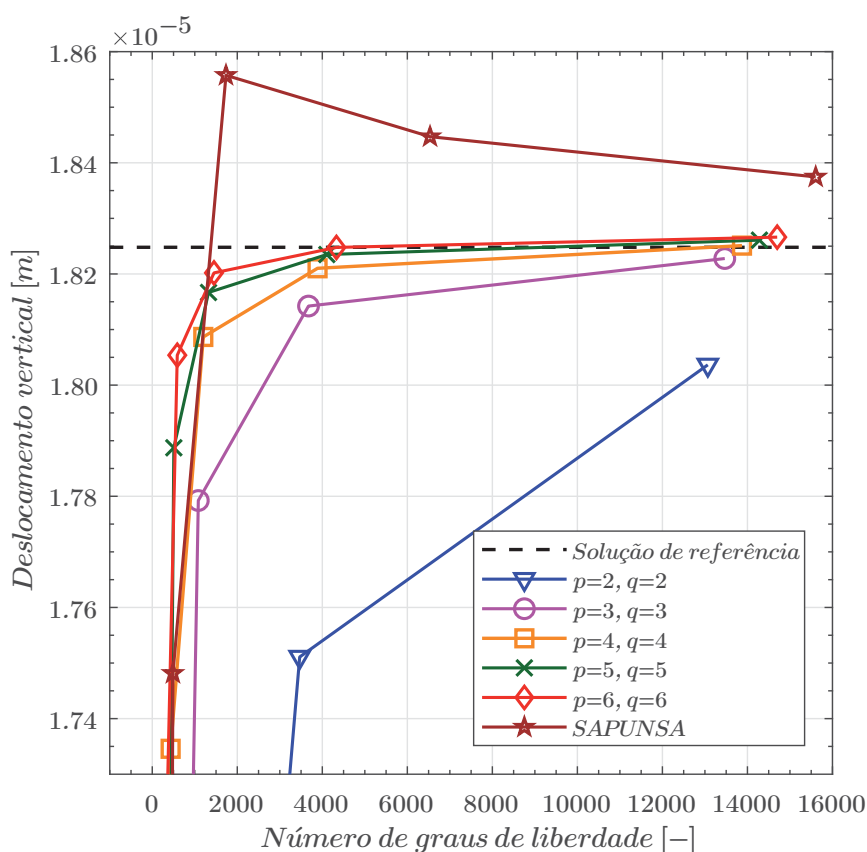


Fonte: O autor.

Nota: (a) Modelagem do cilindro com NURBS. (b) Configuração deformada com fator de escala dos deslocamentos de  $3 \cdot 10^6$ .

A FIGURA 55 mostra as curvas de convergência do deslocamento vertical no ponto de aplicação das cargas pontuais, para diferentes ordens polinomiais e a solução de referência. A solução de convergência obtida é aproximadamente  $u = 1.8255 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , que é ligeiramente superior ao valor de referência  $u_{ref} = 1.8248 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  dado em Belytschko et al. (1985) em torno de 0.04%. O comportamento em geral é semelhante ao exemplo numérico anterior, e de fato, a melhor razão de convergência é obtida com a continuidade máxima. Estes resultados são surpreendentes até certo ponto, dado que a estrutura é submetida a uma carga pontual, produzindo assim uma singularidade.

FIGURA 55 – Cilindro comprimido. Convergência do deslocamento vertical no ponto de aplicação das cargas pontuais.

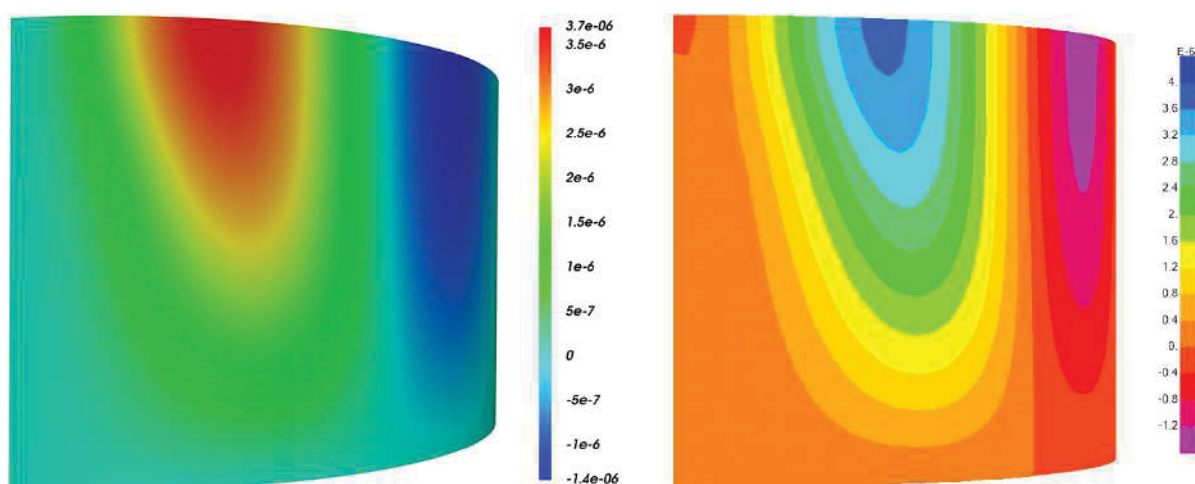


Fonte: O autor.

Do mesmo jeito que para a cobertura de Scordelis-Lo, os gráficos dos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dados na FIGURA 56-58. A solução da AIG é dada à esquerda e a solução da AEF à direita. Os gráficos dos deslocamentos novamente se correlacionam bem. Também as tensões de membrana e flexão generalizadas no plano são comparadas. Os resultados do modelo da AIG para tensões de membrana

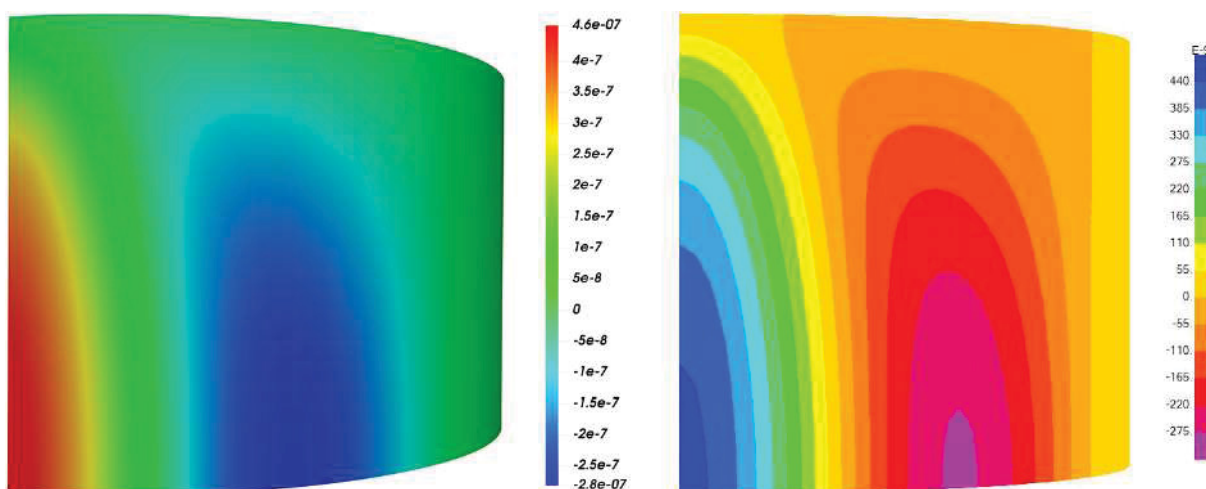
generalizada são mostrados na coluna esquerda da FIGURA 59-61. Os gráficos correspondentes para o modelo de casca com AEF são representados na coluna à direita. A correlação entre os modelos também é boa. Gráficos equivalentes, mas para tensões de flexão generalizada no plano são dados na FIGURA 62-64. Novamente, a correlação é forte e os valores correspondem bem à solução obtida com AEF. Aqui também a solução com AEF é obtida com o software *SAP2000*<sup>TM</sup>. Assim, mesmo neste exemplo também os mapas de cores não correspondem exatamente. Diferenças em valores extremos são resultado do mapeamento de cores

FIGURA 56 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global  $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



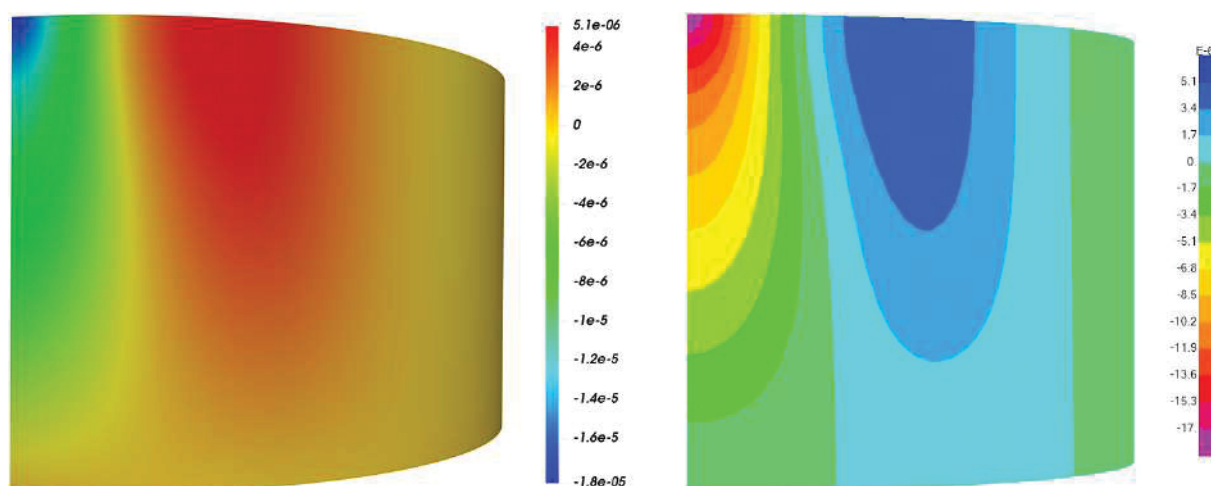
Fonte: O autor.

FIGURA 57 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global  $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



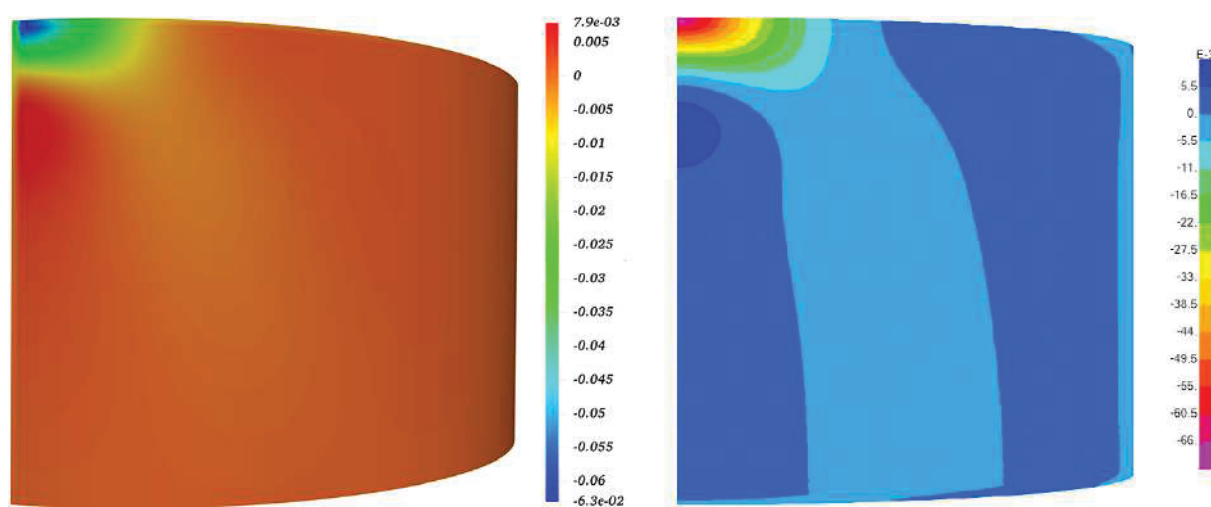
Fonte: O autor.

FIGURA 58 – Cilindro comprimido. Deslocamento na direção global  $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

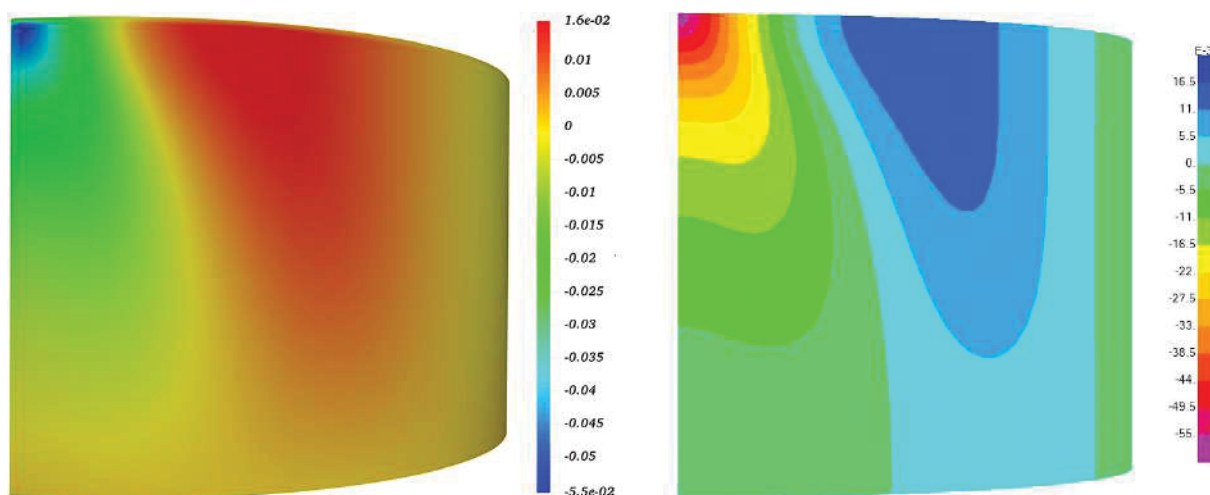
FIGURA 59 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

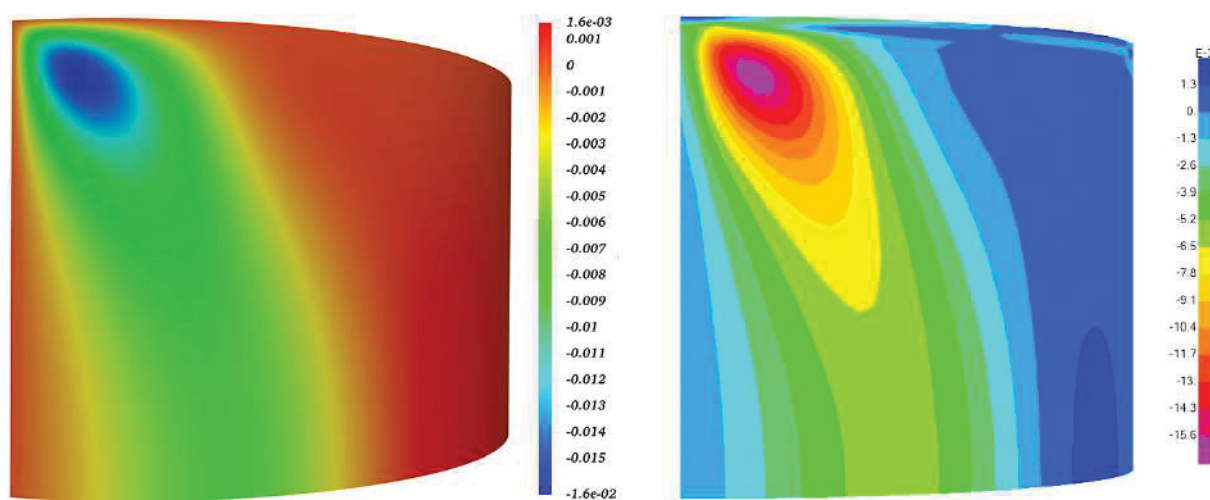


FIGURA 60 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

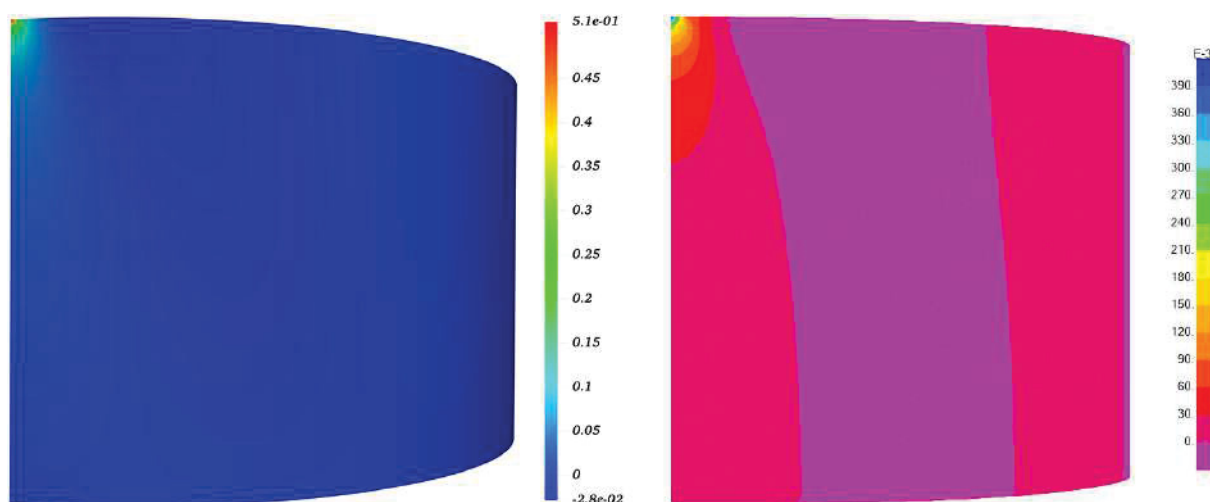
FIGURA 61 – Cilindro comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

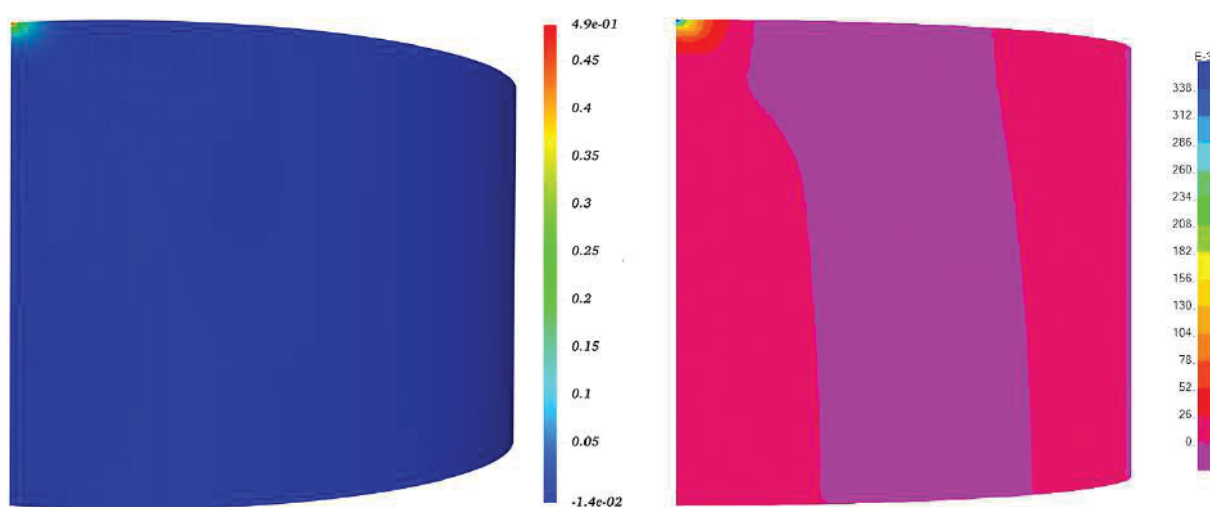


FIGURA 62 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



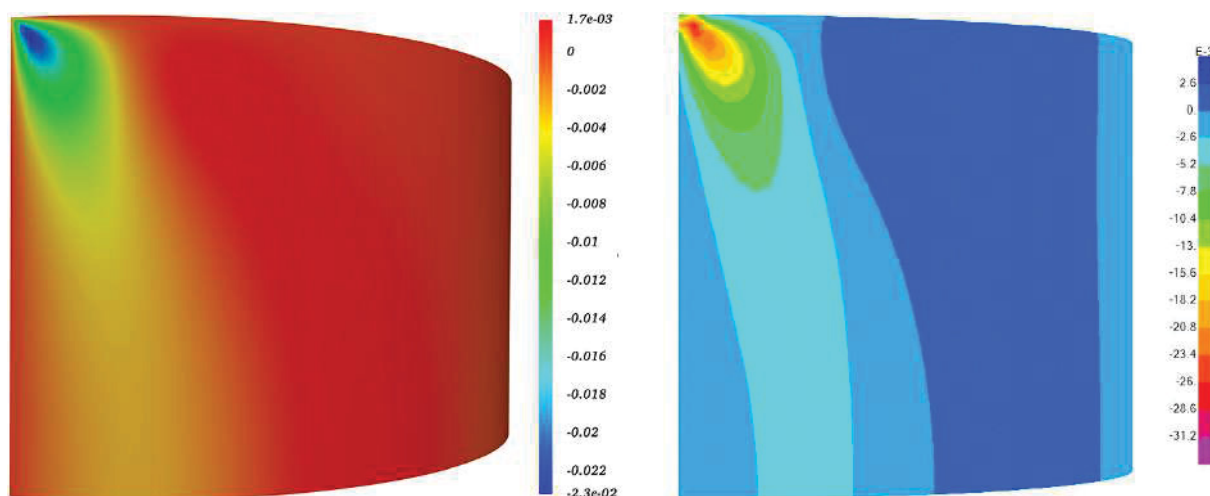
Fonte: O autor.

FIGURA 63 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

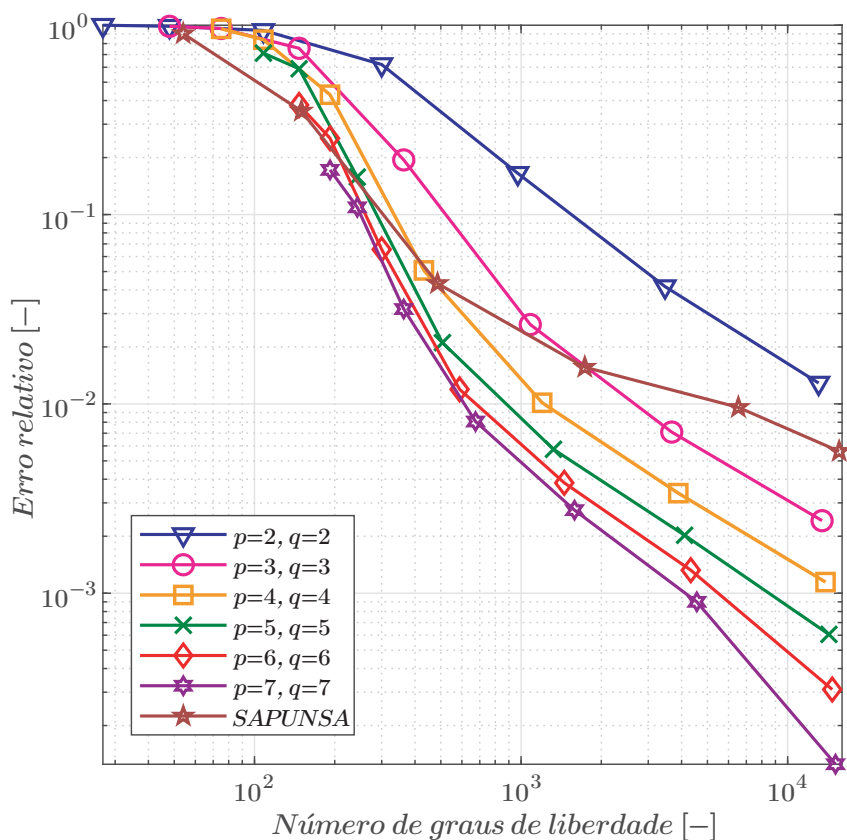
FIGURA 64 – Cilindro comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

### 6.2.3 Comparação de precisão e razão de convergência

FIGURA 65 – Cilindro comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG.



Fonte: O autor.

Tanto para o Cilindro comprimido, como para o primeiro exemplo numérico investigado nesta dissertação, o erro relativo que é dado na Equação (6.4) é investigado. Novamente, o software de elementos finitos *SAPUNSA* é usado para comparação. As características deste software já foram descritas na seção 6.1.2. Para o modelo da AIG, seis resultados são produzidos. Os graus polinomiais variam de  $p = 2$  a  $p = 7$  e  $q = 2$  a  $q = 7$ .

Na FIGURA 65, pode-se ver que a precisão é semelhante tanto para a AIG quanto para a AEF. Os problemas de bloqueio no modelo da AIG com  $p = q = 2$  são claramente visíveis aqui, esta é a solução menos adequada. A solução de elementos finitos com *SAPUNSA* tem um bom desempenho, porém a convergência não é tão suave quanto como o modelo da AIG. A configuração de análise mais precisa com a maior razão de convergência é dada pela AIG com  $p = q = 7$ . Em geral, se pode ver que as soluções da AIG com  $p, q > 3$  têm melhor razão de convergência que a solução da AEF.

### 6.3 HEMISFÉRIO COMPRIMIDO

#### 6.3.1 Configuração do problema

Neste problema, uma casca hemisférica é submetida a quatro cargas pontuais diametralmente opostas. A borda circunferencial inferior do hemisfério está livre. De acordo com Macneal e Harder (1985) existem duas versões para este problema, uma onde o hemisfério está completo e outra onde o hemisfério apresenta um buraco na parte superior. Neste último caso, o buraco é introduzido com a finalidade de usar somente elementos quadriláteros numa AEF. A FIGURA 66 mostra as configurações para os dois tipos do problema. A solução de referência é dada como o deslocamento radial no ponto de aplicação das cargas pontuais. De acordo com Macneal e Harder (1985), o deslocamento de referência para o hemisfério completo é  $u_{ref} = 0.0924 \text{ m}$  e para o hemisfério que apresenta um buraco na parte superior é  $u_{ref} = 0.0940 \text{ m}$ . Devido à simetria, apenas um quarto da geometria é modelada.

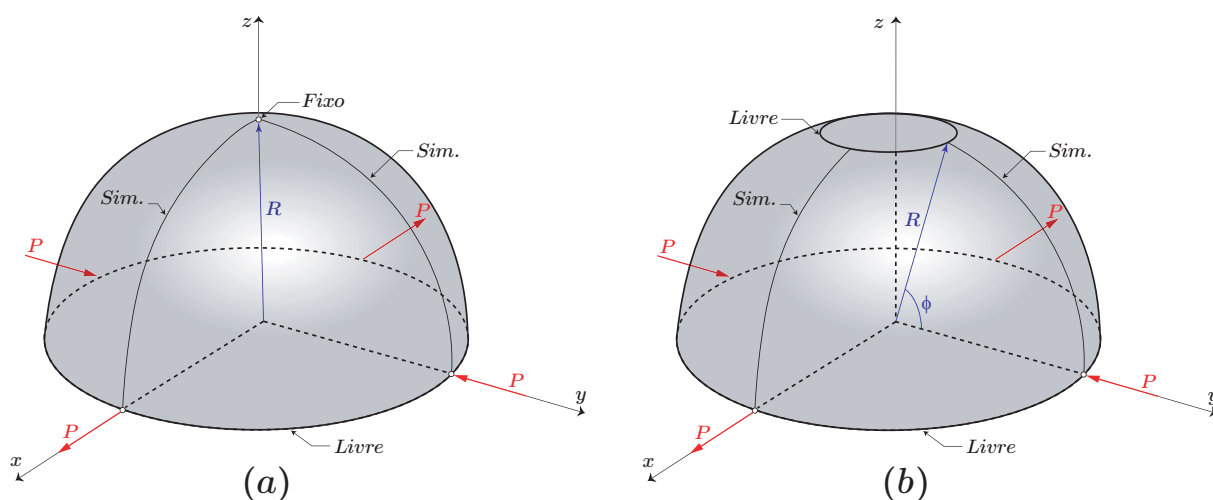
Os parâmetros para os dois tipos de problema são dados na TABELA 4.

TABELA 4 – Hemisfério comprimido. Parâmetros para os modelos.

Variável	Valor	Unidade
Modulo de Young, $E$	$6.825 \cdot 10^7$	$[N/m^2]$
Razão de Poisson, $\nu$	0.30	$[-]$
Espessura da casca, $t$	0.04	$[m]$
Ângulo, $\phi$	72	$[^\circ]$
Raio, $R$	10.0	$[m]$
Cargas pontuais, $P$	$\pm 2$	$[kN/]$

Fonte: O autor.

FIGURA 66 – Hemisfério comprimido.



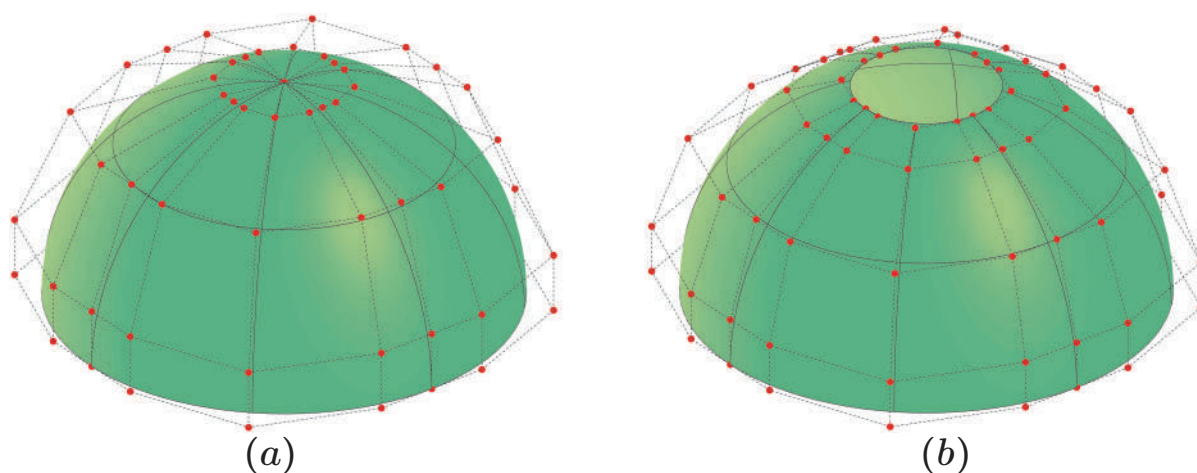
Fonte: O autor.

Nota: (a) Hemisfério completo. (b) Hemisfério com buraco.

### 6.3.2 Verificação de resultados

De um jeito similar aos exemplos anteriores, na [FIGURA 67](#) se mostram as geometrias iniciais completas para os dois tipos de hemisférios (configurações indeformadas) geradas com NURBS  $p = q = 3$ , e na [FIGURA 68](#) pode se ver as configurações deformadas para os dois tipos de hemisférios, com um fator de escala para os deslocamentos de 30.

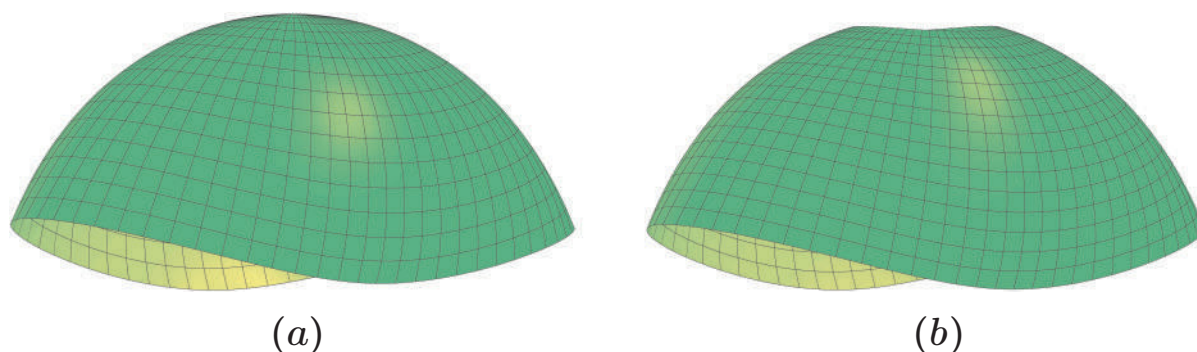
FIGURA 67 – Hemisfério comprimido. Configurações indeformadas.



Fonte: O autor.

Nota: (a) Hemisfério completo. (b) Hemisfério com buraco.

FIGURA 68 – Hemisfério comprimido. Configurações deformadas.



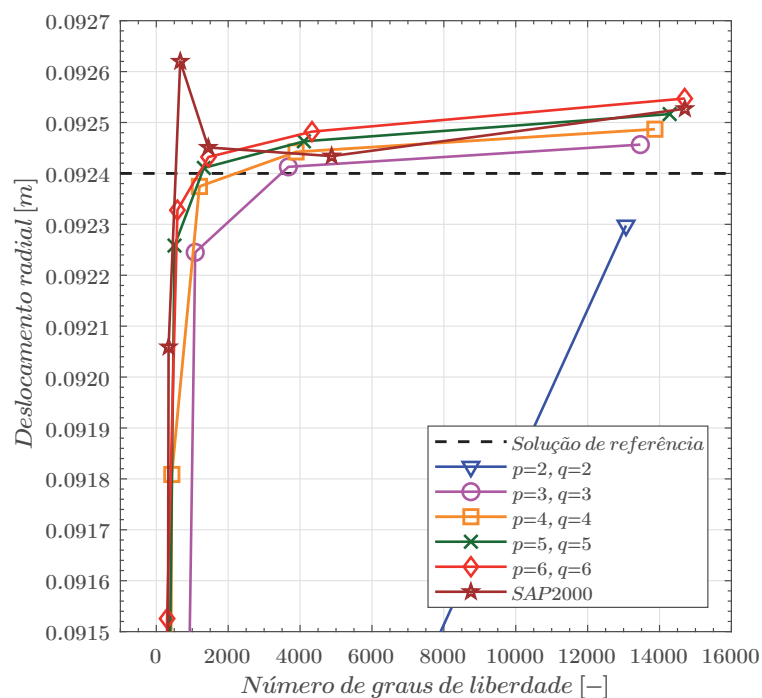
Fonte: O autor.

Nota: (a) Hemisfério completo, (b) Hemisfério com buraco. Para ambos casos têm-se um fator de escala dos deslocamentos de 30 .

Na FIGURA 69 e FIGURA 70, mostram-se as curvas de convergência do deslocamento radial nos pontos de aplicação das cargas pontuais, para cada tipo de hemisfério, isto é feito para diferentes ordens polinomiais e a solução de referência. A solução de convergência obtida para o hemisfério completo é  $u = 0.0924 \text{ m}$  que é igual ao valor de referência dado em Macneal e Harder (1985). Assim mesmo a solução de convergência obtida para o hemisfério com buraco é  $u = 0.0940 \text{ m}$  que também é igual à solução de referência dada em Macneal e Harder (1985). Como pode ser visto, os modelos com os graus polinomiais mais altos fornecem uma melhor aproximação inicial e maior razão de convergência para ambos tipos de hemisférios.

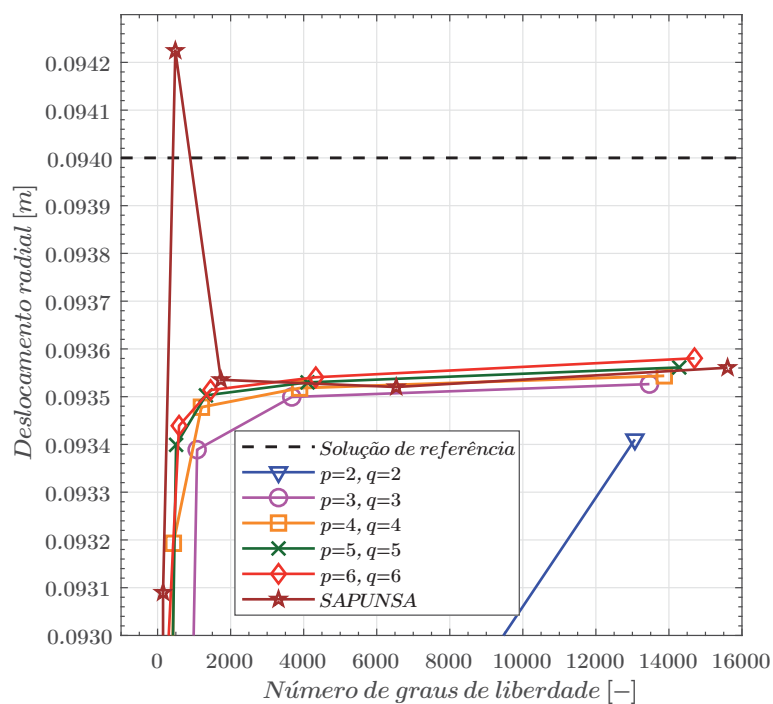
Do mesmo jeito que para os outros exemplos numéricos, apresentam-se os gráficos dos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  que são dados na FIGURA 71-73. A solução da AIG é dada à esquerda e a solução da AEF à direita. Os gráficos dos deslocamentos novamente se correlacionam bem. Também as tensões de membrana e flexão generalizadas no plano são comparadas. Os resultados do modelo da AIG para tensões de membrana generalizada são mostrados na coluna esquerda da FIGURA 74-76. Os gráficos correspondentes para o modelo de casca com AEF são representados na coluna direita. A correlação entre os modelos também é boa. Gráficos equivalentes, mas para tensões de flexão generalizada no plano são dados na FIGURA 77-79. Novamente, a correlação é forte e os valores correspondem bem à solução obtida com AEF. Aqui também a solução com AEF é obtida com o software *SAP2000™*. Neste exemplo também os mapas de cores não correspondem exatamente. Diferenças em valores extremos são resultado do mapeamento de cores. Todos os gráficos mencionados neste paragrafo só corresponderam ao problema do hemisfério completo.

FIGURA 69 – Hemisfério comprimido completo. Convergência do deslocamento radial no ponto de aplicação das cargas pontuais.



Fonte: O autor.

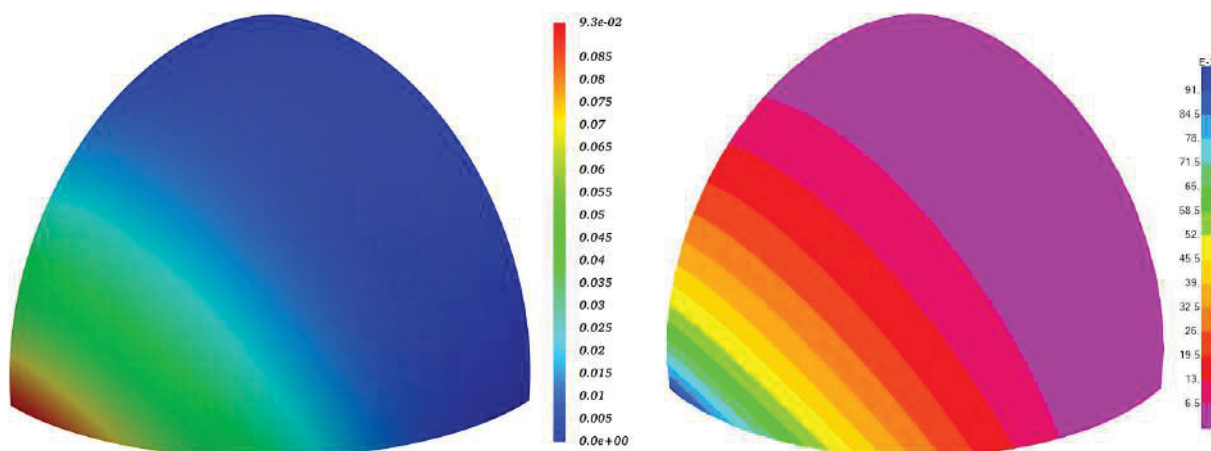
FIGURA 70 – Hemisfério comprimido com buraco. Convergência do deslocamento radial no ponto de aplicação das cargas pontuais.



Fonte: O autor.

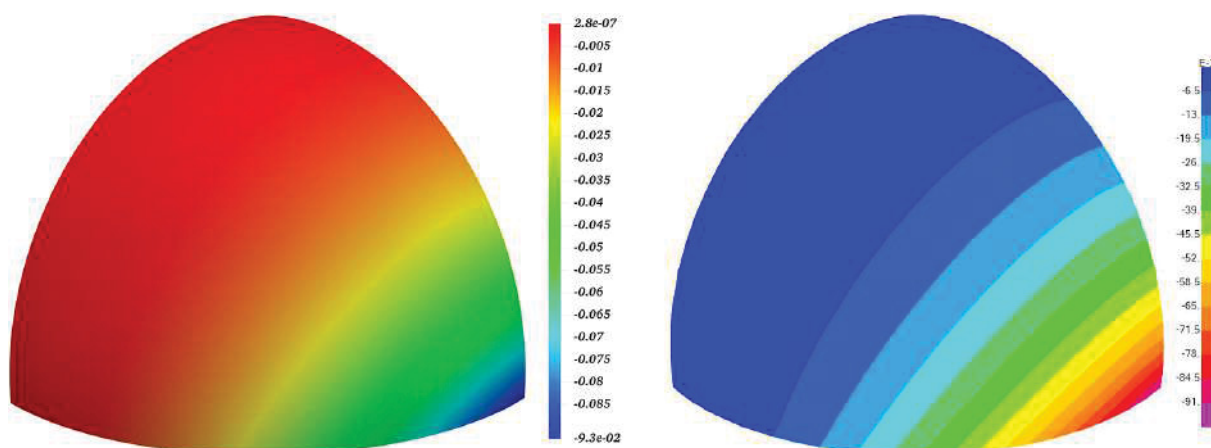


FIGURA 71 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global  $x$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

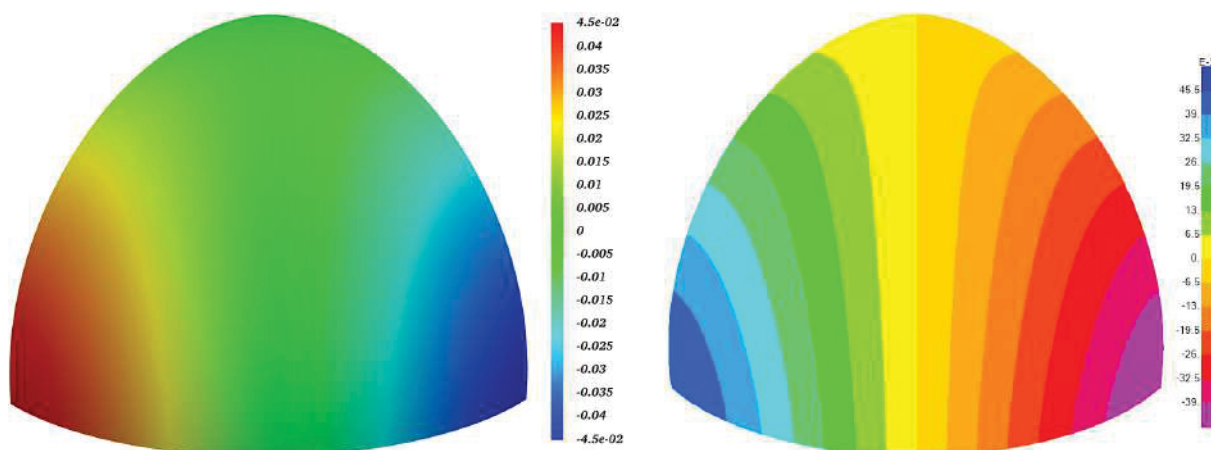
FIGURA 72 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global  $y$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

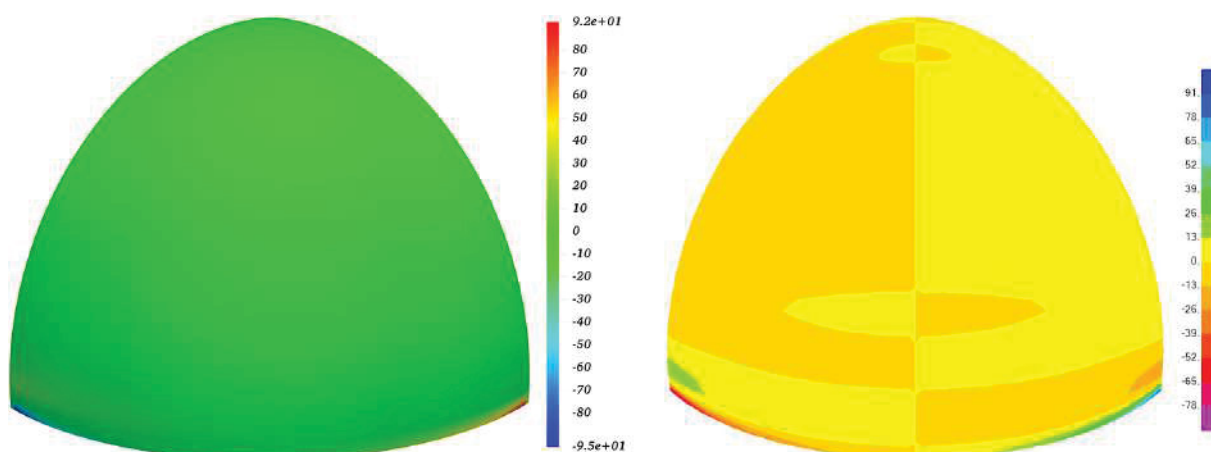


FIGURA 73 – Hemisfério comprimido. Deslocamento na direção global  $z$ , modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



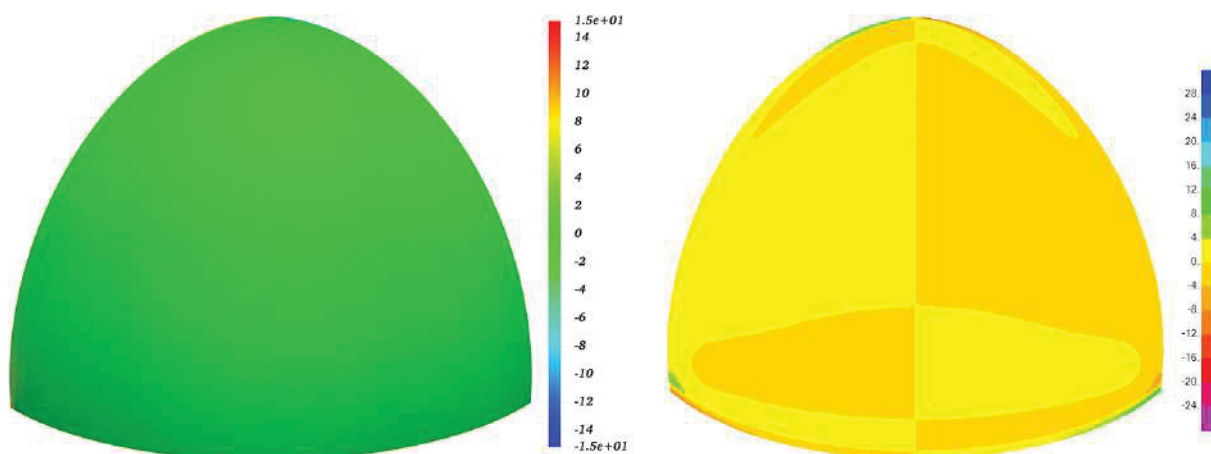
Fonte: O autor.

FIGURA 74 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



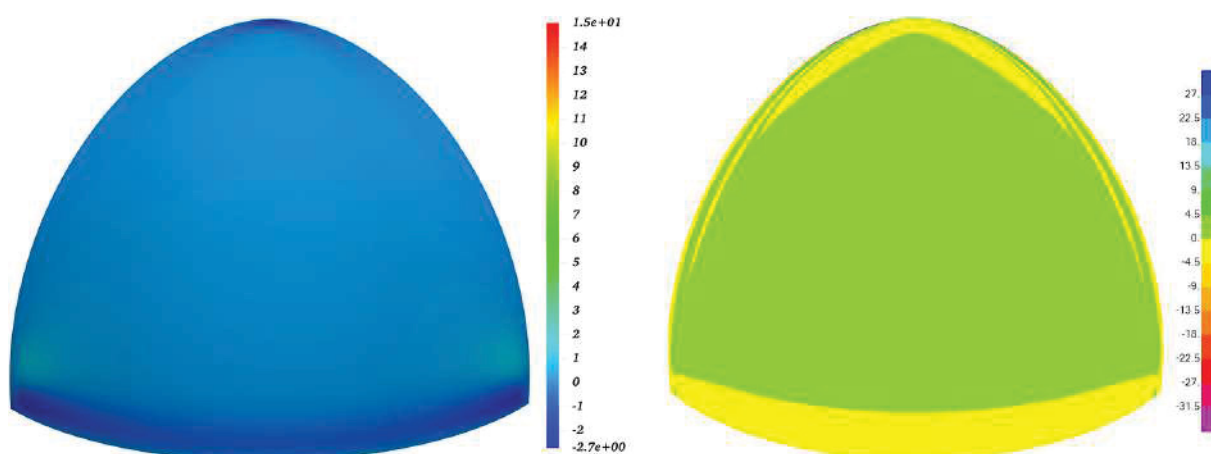
Fonte: O autor.

FIGURA 75 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



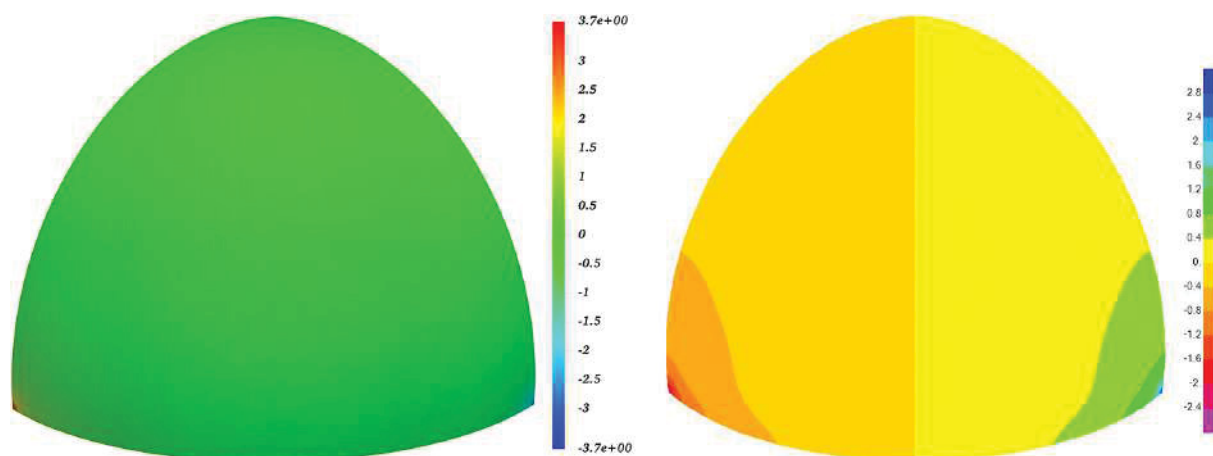
Fonte: O autor.

FIGURA 76 – Hemisfério comprimido. Força resultante local, componente  $\hat{n}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



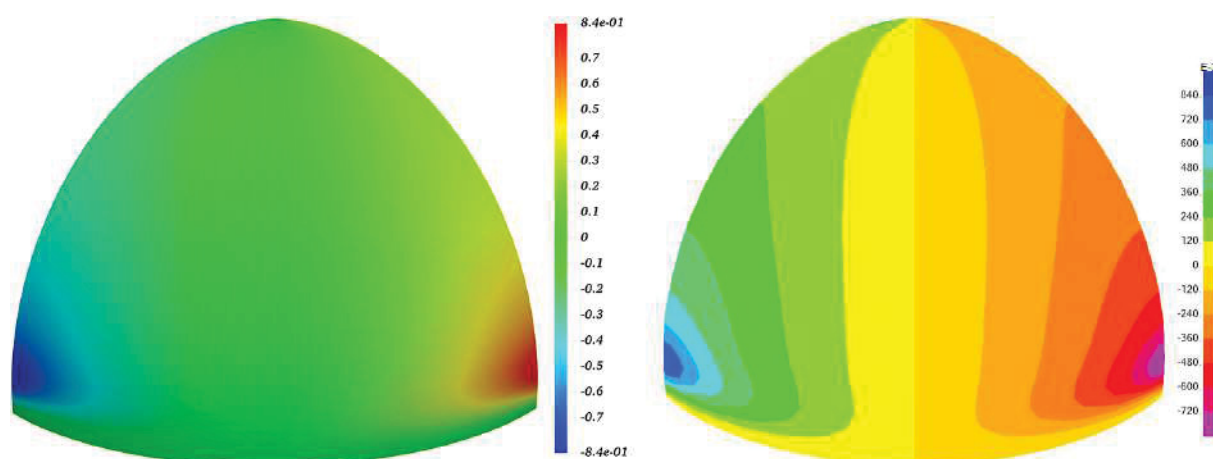
Fonte: O autor.

FIGURA 77 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{11}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



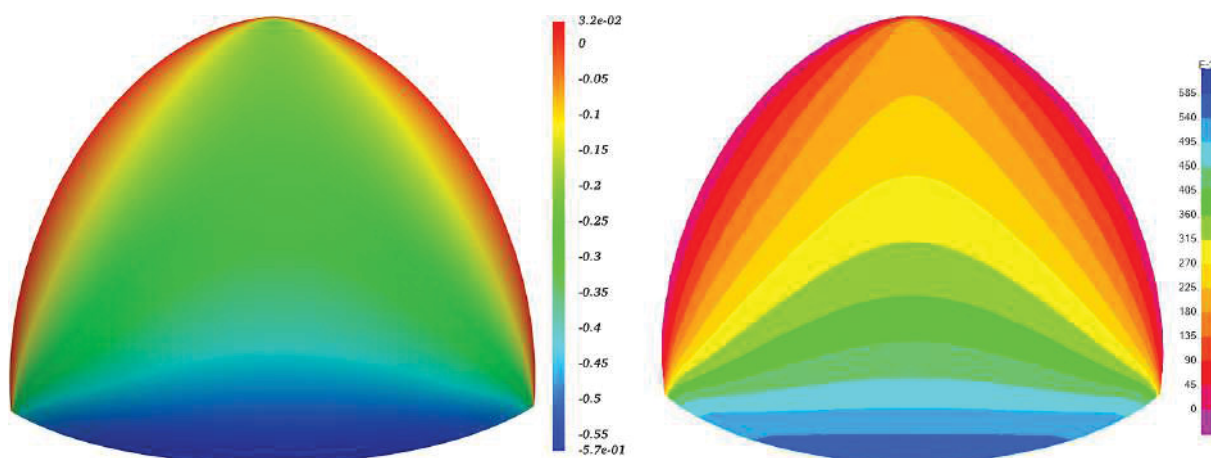
Fonte: O autor.

FIGURA 78 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{22}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



Fonte: O autor.

FIGURA 79 – Hemisfério comprimido. Momento resultante local, componente  $\hat{m}^{12}$ . Modelo de casca da AIG na esquerda e solução pela AEF na direita.



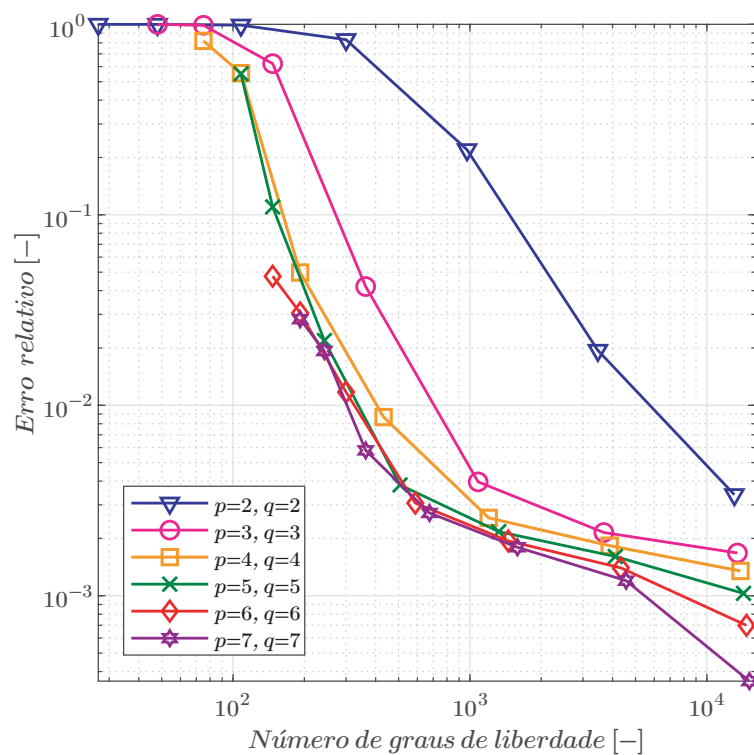
Fonte: O autor.

### 6.3.3 Comparação de precisão e razão de convergência

Para os dois tipos de hemisférios comprimidos, como para os outros exemplos numéricos investigados nesta dissertação, o erro relativo que é dado na Equação (6.4) é investigado. Novamente, o software de elementos finitos *SAPUNSA* é usado para comparação, mas só para o exemplo do hemisfério com buraco, isto devido a que o software *SAPUNSA* trabalha somente como elementos quadriláteros e para gerar a geometria do hemisfério completo precisa-se de elementos triangulares. Mas os resultados do hemisfério com buraco são equivalentes para o hemisfério completo. Para os modelos da AIG, seis resultados são produzidos. Os graus polinomiais variam de  $p = 2$  a  $p = 7$  e  $q = 2$  a  $q = 7$ .

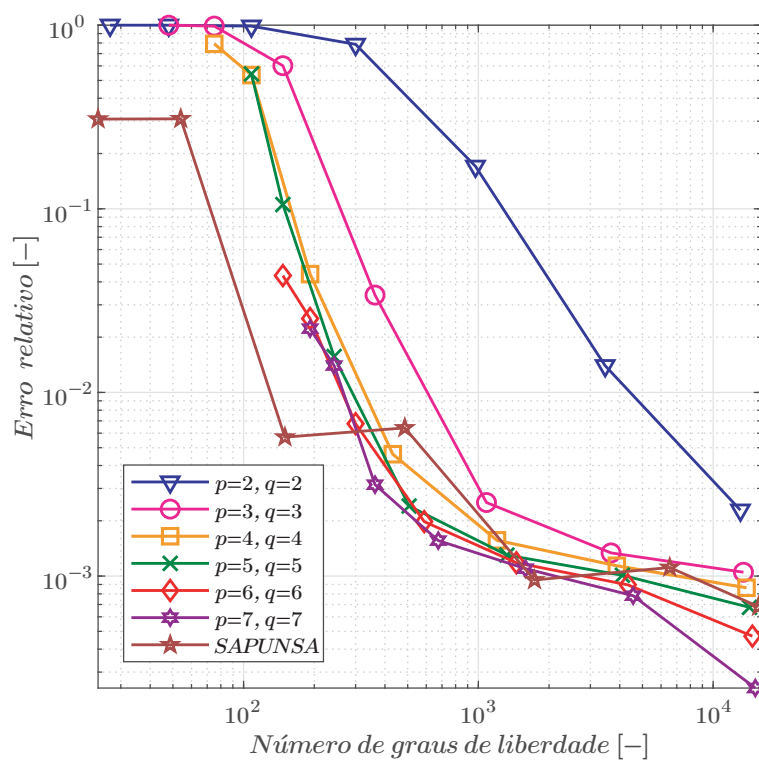
Na FIGURA 80 e FIGURA 81, pode-se ver que para ambos tipos de hemisférios os problemas de travamento para o modelo da AIG com  $p = q = 2$  são novamente visíveis, sendo esta solução a menos adequada. A solução de elementos finitos com *SAPUNSA* tem um bom desempenho, porém a convergência não é tão suave quanto como o modelo da AIG. Novamente a configuração de análise mais precisa e com a maior razão de convergência é dada pela AIG com  $p = q = 7$ . Em geral, se pode ver que as soluções da AIG com  $p, q > 3$  têm melhor razão de convergência que a solução da AEF. Também pode-se observar uma boa capacidade dos modelos da AIG para modelar corretamente a quase pura deformação por flexão.

FIGURA 80 – Hemisfério completo comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG.



Fonte: O autor.

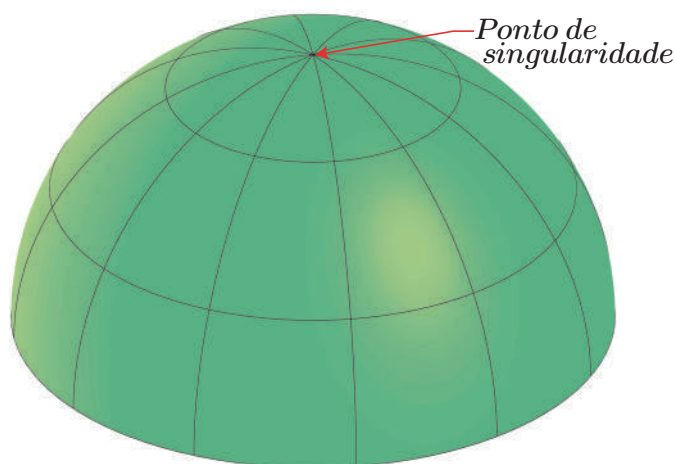
FIGURA 81 – Hemisfério com buraco comprimido. Comparação entre os modelos de AEF e AIG.



Fonte: O autor.

Aproveitaremos o modelo do hemisfério completo para mencionar um aspecto importante sobre a modelagem de superfícies NURBS e suas implicações na AIG. Da FIGURA 26, pode-se ver que o espaço paramétrico de cada patch de superfície NURBS é construído pelo produto tensorial de dois vetores de nós unidimensionais. Portanto, um patch de superfície NURBS é sempre de topologia quadrilateral. Na FIGURA 67(a), mostra-se a modelagem com NURBS do hemisfério completo e sua parametrização, que consiste de 85 pontos de controle, onde 17 pontos de controle coincidem no centro do topo do hemisfério. Obviamente, isto produz uma singularidade no centro do topo do hemisfério. A FIGURA 82 mostra esta parametrização após algum refinamento. Todos os elementos no centro do topo são topologicamente quadriláteros degenerados em triângulos, e com o aumento do refinamento eles chegam a ser muito pequenos. Devido à singularidade no centro do topo o *Jacobiano* chega a ser zero neste ponto. Mas foi demonstrado por Kiendl (2011) que este tipo de singularidade produzido pelo tipo de parametrização usada para gerar a geometria com NURBS não apresenta problemas severos para a análise, já que este ponto de singularidade não se encontra sobre os pontos de integração. Assim, outra importante observação é que a formulação baseada em NURBS é bastante insensível às distorções de malha (LIPTON et al., 2010).

FIGURA 82 – Hemisfério completo. Parametrização usada para gerar a geometria com NURBS.



Fonte: O autor.

Adicionalmente, nos meridianos dos quatro quadrantes do hemisfério, FIGURA 82, têm apenas continuidade  $C^0$  devido à definição rotacional com que foi gerada a geometria. Como se mencionou na subseção 3.4, para a AIG de cascas é necessária pelo menos a continuidade  $G^1$ , o que significa que *restrições de continuidade* devem ser aplicadas para utilizar este modelo geométrico para a análise, estas *restrições de continuidade* serão apresentadas na seguinte seção.

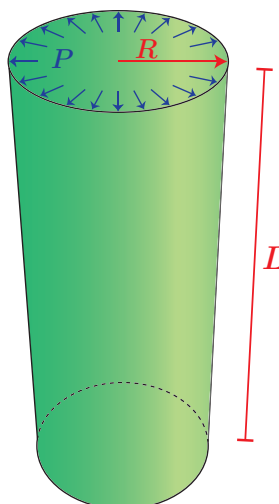
## 6.4 CASCA CILÍNDRICA FINA COM EXTREMOS ENGASTADOS SUBMETIDA A PRESSÃO INTERNA CONSTANTE

A análise de estruturas de paredes finas apresenta vários desafios. Elas são notoriamente sensíveis às imperfeições na geometria, já que uma pequena amolgadela na superfície reduz muito a carga de flambagem. Como se mencionou no capítulo 5, ao realizar a análise de tais estruturas, representações geométricas precisas são absolutamente vitais para a obtenção de resultados precisos. Além disso, eles são propensos a fenômenos de camada limite, bloqueio e uma série de outros obstáculos para a obtenção de soluções numéricas precisas. Até agora vimos que as NURBS não somente representam com precisão a geometria, mas também resolvem muito bem características da solução, mesmo em discretizações surpreendentemente grossas. Então o objetivo do presente exemplo numérico é mostrar a precisão da formulação de cascas com NURBS ante o fenômeno de camada limite e o tratamento de problemas com multipatches.

### 6.4.1 Configuração do problema

Neste último exemplo numérico, um cilindro com extremos engastados é submetido a uma pressão interna constante, como é mostrado na FIGURA 83. Os extremos engastados criam o fenômeno chamado *camada limite* que é difícil de ser capturado com precisão com a clássica AEF de baixa ordem. A solução exata da teoria de cascas finas é dada em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), esta é obtida sob a hipótese de tensão no plano. Para o tratamento totalmente tridimensional do problema com extremos engastados, esta solução foi modificada por Hughes *et al.* em (HUGHES; BAZILEVS; COTTRELL, 2009).

FIGURA 83 – Casca cilíndrica fina. Geometria e pressão interna



Fonte: O autor.



Assim a solução exata para o deslocamento radial  $u(x)$  do cilindro engastado e com pressão interna constante é:

$$u(x) = -\frac{PR^2}{\tilde{E}t} (1 - C_1 \sin(\beta x) \sinh(\beta x) - C_2 \cos(\beta x) \cosh(\beta x)) \quad (6.5)$$

$$x \in (-L/2, L/2)$$

$$C_1 = \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6.6)$$

$$C_2 = \frac{\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6.7)$$

$$\beta = \left( \frac{\tilde{E}t}{4R^2 D} \right)^{0.25}, \quad \alpha = \frac{\beta L}{2}, \quad D = \frac{\tilde{E}t^3}{12(1 - \tilde{\nu}^3)} \quad (6.8)$$

Onde

$$\tilde{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{e} \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (6.9)$$

Os parâmetros para este problema são dados na [TABELA 5](#).

TABELA 5 – Casca cilíndrica fina. Parâmetros para o modelo.

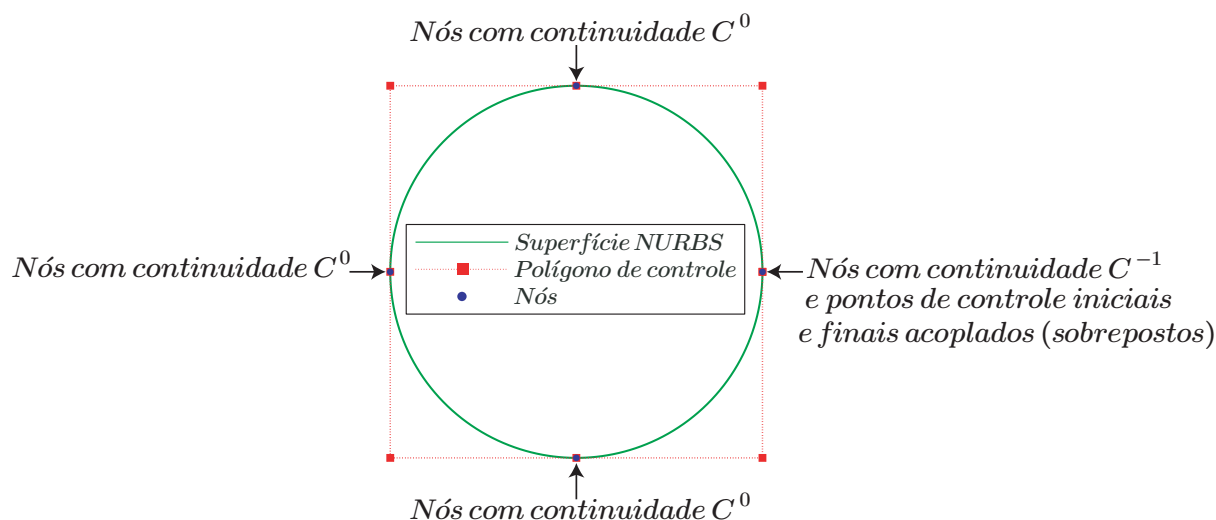
Variável	Valor	Unidade
Modulo de Young, $E$	$3.0 \cdot 10^6$	$[kN/m^2]$
Razão de Poisson, $\nu$	0.30	$[-]$
Espessura da casca, $t$	0.01	$[m]$
Raio, $R$	1.0	$[m]$
Comprimento, $L$	5.0	$[m]$
Pressão interna, $P$	10	$[kN/m^2]$

Fonte: O autor.

No exemplo numérico anterior mencionou-se que um patch de superfície NURBS é sempre de topologia quadrilateral. A geometria do cilindro neste problema é gerada como uma superfície de revolução, a partir de uma linha vertical geratriz que é rotacionada ao redor de um eixo de revolução ([PIEGL; TILLER, 1997](#)). Este procedimento para gerar a geometria produz as continuidades que são mostradas numa vista superior do cilindro na [FIGURA 84](#).

O cilindro aparece como uma superfície suave e fechada. Porém, na representação NURBS do cilindro, existe uma localização onde o início e o final do patch NURBS se juntam (localização onde os pontos de controle iniciais e finais estão sobrepostos), que é uma localização onde os nós tem continuidade  $C^{-1}$  devido ao uso de vetores de

FIGURA 84 – Casca cilíndrica fina. Vista superior das Continuidades no modelo.



Fonte: O autor.

nós abertos. Além disso, existem três localizações onde os nós têm continuidade  $C^0$  devido a nós internos com multiplicidade no vetor de nós aberto. Então, é importante que as condições de continuidade necessárias para a análise sejam asseguradas. Para isso, restrições adicionais são necessárias com a finalidade de impor as condições de continuidade necessárias para a análise. A continuidade  $C^0$  é necessária para garantir uma superfície fechada, independente do tipo de elemento usado na análise, e é obtida pelo acoplamento dos pontos de controle do patch nos extremos que se juntam. Para a formulação de cascas de Kirchhoff-Love apresentada, pelo menos a continuidade  $C^1$  é necessária em todos os lugares do patch. Isso significa que as localizações de continuidade  $C^0$  precisam ser identificadas e corrigidas.

Da FIGURA 84, observamos que o cilindro está conformado por um só patch de superfície NURBS com continuidade  $C^0$  em três quadrantes e continuidade  $C^{-1}$  num quadrante, esta configuração é equivalente a ter quatro patches de superfícies NURBS que geram a geometria do cilindro. Então o tratamento para garantir a continuidade entre vários patches é válido para corrigir a continuidade de nosso exemplo numérico, na seguinte subseção revisaremos o enfoque proposto por J. Kiendl para o tratamento de multipatches.

#### 6.4.2 Cascas multipatch

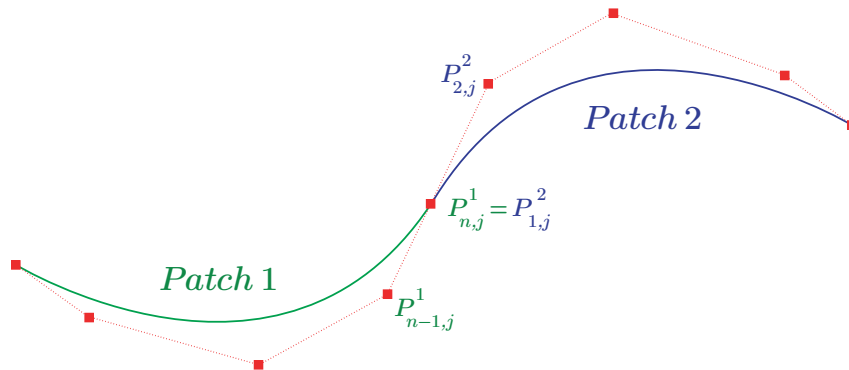
Nos capítulos anteriores, foi mostrado que as NURBS são ideais como funções base para cascas baseadas na teoria de Kirchhoff-Love, já que fornecem continuidade  $C^1$  entre os elementos para superfícies arbitrariamente curvas. Se a estrutura

é composta de vários patches NURBS, a questão é como essa continuidade pode ser estabelecida entre os patches. Se os patches estiverem conectados apenas com a continuidade  $C^0$ , isso significa que apenas os deslocamentos na interface estão acoplados, mas não as inclinações. Em um sentido mecânico, isso representa uma conexão de articulação onde os respectivos momentos de flexão não podem ser transferidos. O mesmo se aplica se uma continuidade  $C^0$  acontece dentro de um patch, devido à multiplicidade de nós, que é o caso do problema de casca cilíndrica fina que estamos analisando. Na continuação, as soluções propostas por *J. Kiendl* para cascas multipatch são apresentadas. Estas soluções também podem ser aplicadas a patches que apresentam continuidade  $C^0$  no interior. Para a conexão de dois patches, dois casos básicos precisam ser distinguidos. Há patches suaves, isto é, patches com continuidade  $G^1$ , por um lado, e patches formando uma dobra, por outro lado. Para interfaces de patch com continuidade  $G^1$ , essa continuidade deve ser mantida durante a análise, enquanto que para patches que envolvem uma dobra, o ângulo entre os patches deve ser mantido.

#### 6.4.2.1 Multipatch suaves

Na seção 3.4, a diferença entre continuidade paramétrica e continuidade geométrica foi discutida. A continuidade entre dois patches para análise deve ser independente da parametrização dos patches individualmente e, portanto, a continuidade geométrica é a única de interesse. Para superfícies paramétricas, a continuidade  $G^1$  significa que duas superfícies que se unem numa borda comum têm um plano tangente comum em cada ponto ao longo dessa borda, ver FIGURA 85. Para superfícies B-Spline, isso resulta na condição apresentada na Equação (3.49), que é repetida aqui para maior clareza:

FIGURA 85 – Casca cilíndrica fina. Multipatch suaves.



Fonte: O autor.

$$(P_{2,j}^2 - P_{n,j}^1) = c \cdot (P_{n,j}^1 - P_{n-1,j}^1) \quad j = 1, \dots, m$$

Para NURBS, a mesma condição deve ser aplicada às coordenadas homogêneas dos pontos de controle, Equação (3.50):

$$(P_{2,j}^{w,2} - P_{n,j}^{w,1}) = c \cdot (P_{n,j}^{w,1} - P_{n-1,j}^{w,1}) \quad j = 1, \dots, m$$

Como na AIG somente as coordenadas físicas são graus de liberdade, enquanto os pesos de controle são invariantes, a condição de continuidade para as B-Splines (3.49) é empregada. Esta é uma aproximação para NURBS e a continuidade pode não ser satisfeita exatamente em qualquer ponto se os pesos dos pontos de controle envolvidos fossem diferentes. Porém, como por refinamento as diferenças nos pesos dos pontos de controle vizinhos se tornam mínimas, o erro é insignificante.

Para preservar a continuidade  $G^1$  na configuração deformada, a Equação (3.49) deve ser mantida para os pontos de controle na configuração deformada (denotada como  $\bar{P}$ ):

$$\begin{aligned} (\bar{P}_{2,j}^2 - \bar{P}_{n,j}^1) &= c \cdot (\bar{P}_{n,j}^1 - \bar{P}_{n-1,j}^1) \\ c\bar{P}_{n-1,j}^1 - (1+c)\bar{P}_{n,j}^1 + \bar{P}_{2,j}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

E, portanto, a mesma relação se aplica aos deslocamentos:

$$c\mathbf{u}_{n-1,j}^1 - (1+c)\mathbf{u}_{n,j}^1 + \mathbf{u}_{2,j}^2 = 0 \quad (6.11)$$

A Equação (6.11) representa restrições lineares entre os graus de liberdade do sistema que podem ser aplicados por diferentes métodos, mas nesta dissertação usaremos um enfoque de penalização (FELIPPA, 2004), para isso rescrevemos a Equação (6.11) em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} c & -(1+c) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1,j}^1 \\ \mathbf{u}_{n,j}^1 \\ \mathbf{u}_{2,j}^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

E multiplicamos ambos lados pela transposta do vetor de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} c \\ -(1+c) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -(1+c) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1,j}^1 \\ \mathbf{u}_{n,j}^1 \\ \mathbf{u}_{2,j}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} c^2 & -c(1+c) & c \\ -c(1+c) & (1+c)^2 & -(1+c) \\ c & -(1+c) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1,j}^1 \\ \mathbf{u}_{n,j}^1 \\ \mathbf{u}_{2,j}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_p \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Aqui  $\mathbf{K}_p$  é a matriz de rigidez *sem escala* do elemento de penalização. Isto agora é multiplicado pelo *peso de penalização*  $w$ , Equação (6.15), e montado na matriz

de rigidez global da estrutura seguindo as regras usuais:

$$w \cdot \begin{bmatrix} c^2 & -c(1+c) & c \\ -c(1+c) & (1+c)^2 & -(1+c) \\ c & -(1+c) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1,j}^1 \\ \mathbf{u}_{n,j}^1 \\ \mathbf{u}_{2,j}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

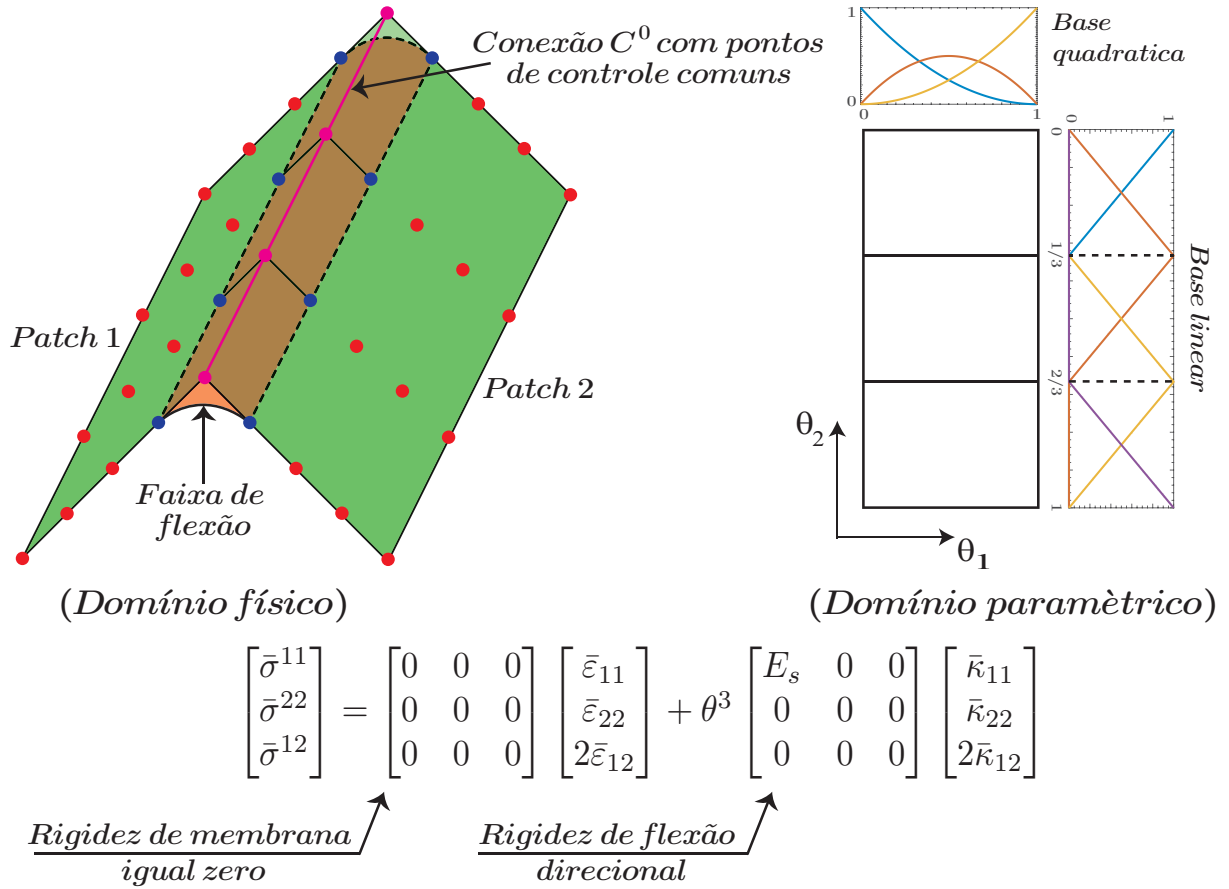
#### 6.4.2.2 Método da faixa de flexão

Enquanto que para a conexão de patches suaves a continuidade  $G^1$  tem que ser mantida, para patches que se juntam numa dobra com um certo ângulo, o ângulo entre os dois patches tem que ser mantido na configuração deformada. Semelhante ao caso suave, isto é conseguido acoplando os graus de liberdade que definem o ângulo. Estes são os pontos de controle na borda comum e seus pontos de controle vizinhos em cada lado. Para cada triplo de pontos de controle  $P_{2,j}^2$ ,  $P_{n,j}^1$  e  $P_{n-1,j}^1$  ao longo da borda, o ângulo coberto por esses pontos de controle deve permanecer constante durante a deformação. Aqui apresentamos um método que satisfaz as restrições lineares entre os pontos de controle num sentido fraco, o que significa que o ângulo é mantido constante aproximadamente. O método também pode ser aplicado a multipatch suaves, o que pode ser considerado como uma dobra de  $180^\circ$ . Assim, o método pode ser usado como um método geral para lidar com estruturas multipatch.

A restrição do ângulo é imposta por um patch NURBS adicional com propriedades especiais. Os triplos de pontos de controle na borda comum dos patches, consistindo dos pontos de controle compartilhados na borda e um em cada lado, são extraídos e usados como malha de controle para o patch adicional, ver [FIGURA 86](#). O domínio paramétrico deste patch consiste num elemento quadrático na direção transversal à borda comum e, por simplicidade e eficiência computacional, de  $n - 1$  elementos lineares ao longo da borda comum onde  $n$  é o número de pontos de controle nessa direção. Este patch adicional, é chamado de *faixa de flexão* ([KIENDL; BAZILEVS et al., 2010](#)), possui propriedades especiais para o material: não possui rigidez de membrana e rigidez de flexão somente na direção transversal à borda comum. Com isso, é assegurado que apenas os três pontos de controle  $P_{2,j}^2$ ,  $P_{n,j}^1$  e  $P_{n-1,j}^1$  estejam num triplo acoplamento um com outro através da borda, mas nenhum acoplamento entre os pontos de controle ao longo da borda é feito. Esta é uma característica muito importante porque garante que nenhuma rigidez adicional é adicionada à estrutura.

É importante notar que, embora as faixas de flexão são implementadas como patches estruturais adicionais, o que torna a implementação fácil e eficiente, elas não representam partes estruturais, senão somente restrições no ângulo entre os patches. As faixas de flexão também têm massa zero para o caso de análise dinâmica. Matematicamente, o método consiste em aumentar o princípio do trabalho virtual com

FIGURA 86 – Casca cilíndrica fina. Faixa de flexão.



Fonte: O autor.

termos adicionais da forma:

$$\delta W_{int} = - \int_A \frac{t^3}{12} \bar{\kappa}^T \bar{C}_s \delta \bar{\kappa} dA \quad (6.16)$$

Para cada faixa de flexão. A matriz constitutiva do material da faixa de flexão  $\bar{C}_s$  é dada por:

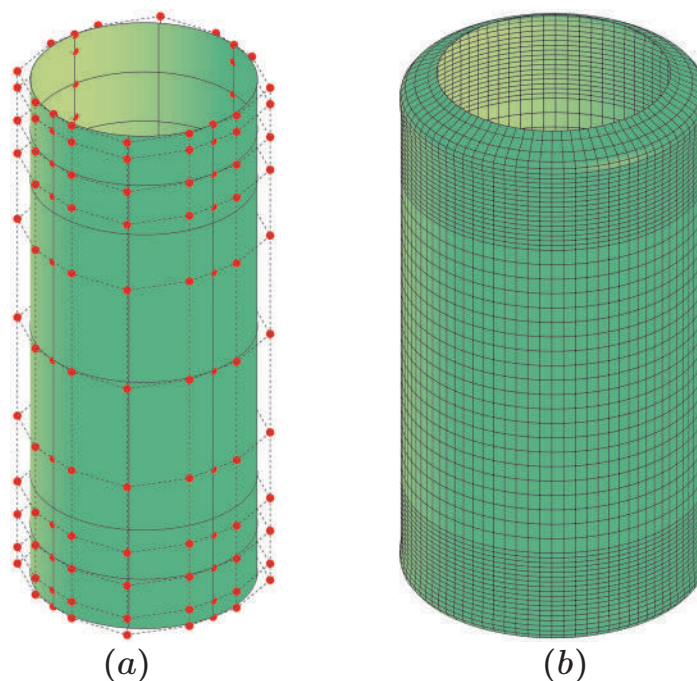
$$\bar{C}_s = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Onde  $E_s$  é a rigidez por flexão direcional. O ponto crucial é a escolha correta para  $E_s$ . Este deve ser suficientemente alto para que a mudança no ângulo esteja dentro de uma tolerância aceitável. Porém, se  $E_s$  for escolhido muito alto, a matriz de rigidez global pode tornar-se mal condicionada e a solução instável. A rigidez da faixa de flexão  $E_s$  é escolhida como uma potência decimal do módulo de Young da estrutura  $E$ , de acordo com *J. Kiendl*, todos os valores de rigidez no intervalo de  $10^3 \leq E_s/E \leq 10^5$  fornecem resultados confiáveis e estáveis.

### 6.4.3 Verificação de resultados

Na FIGURA 87(a) mostra-se a geometria inicial do cilindro (configuração indeformada) gerada com NURBS de grau  $p = q = 3$ , e na FIGURA 87(b) pode se ver a configuração deformada do cilindro com um fator de escala dos deslocamentos de 1000.

FIGURA 87 – Casca cilíndrica fina. Configurações indeformada e deformada.



Fonte: O autor.

Nota: (a) Modelagem do cilindro com NURBS. (b) Configuração deformada com fator de escala dos deslocamentos de 1000.

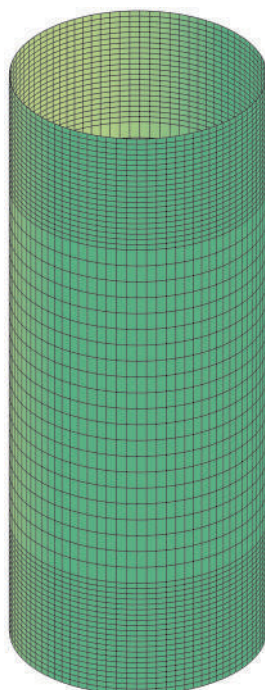
Neste exemplo numérico fazemos uso da malha mostrada na FIGURA 88, sendo que esta malha é obtida através de um *refinamento*  $k$  para diferentes ordens polinomiais ( $p = q = 2, 3, 4, 5$ ). Observe que geramos uma malha mais densa perto dos extremos engastados, com a finalidade de capturar o fenômeno de camada limite, mas criando uma malha mais grossa na parte central do cilindro. O refinamento uniforme subsequente resultará numa alta porcentagem do total de elementos na região que contém o fenômeno de camada limite que desejamos capturar.

Na FIGURA 89 são apresentados os contornos do deslocamento radial: FIGURA 89(a) correspondente à solução do deslocamento radial usando o enfoque de penalização de *multipatch suaves*, FIGURA 89(b) é o deslocamento radial usando o método da *faixa de flexão* e finalmente com fins de comparação a solução da AEF é mostrado na FIGURA 89(c). Esta última solução é obtida usando o software *SAP2000™*. Como se pode ver a correlação é forte e os valores correspondem bem à solução



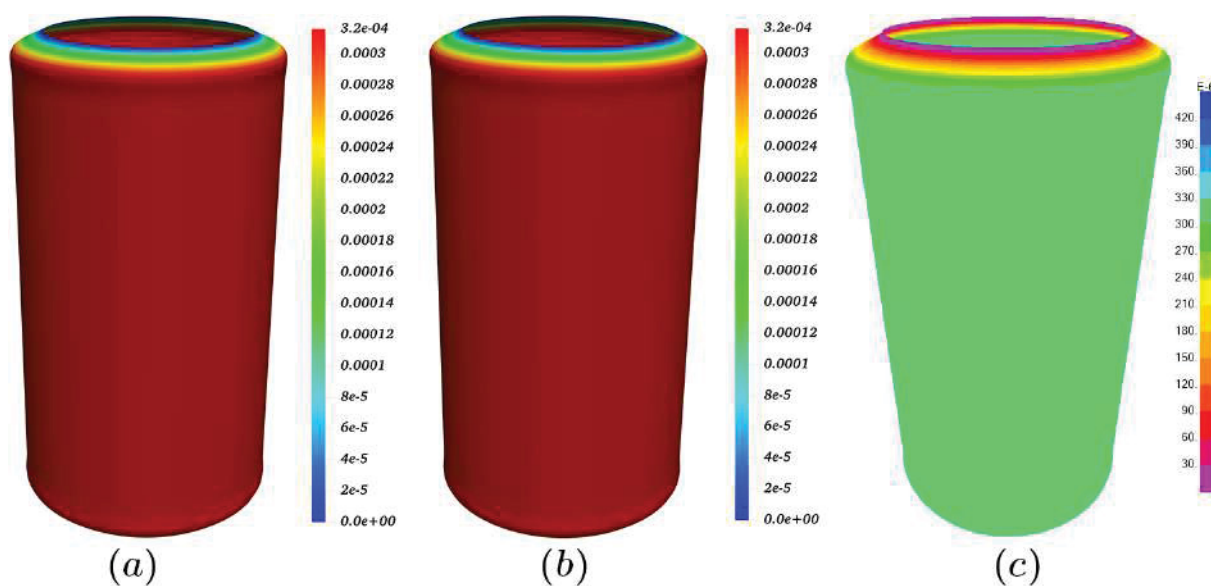
obtida da AEF. Do mesmo jeito que para os outros exemplos, os mapas de cores não correspondem exatamente.

FIGURA 88 – Casca cilíndrica fina. Malha usada na AIG.

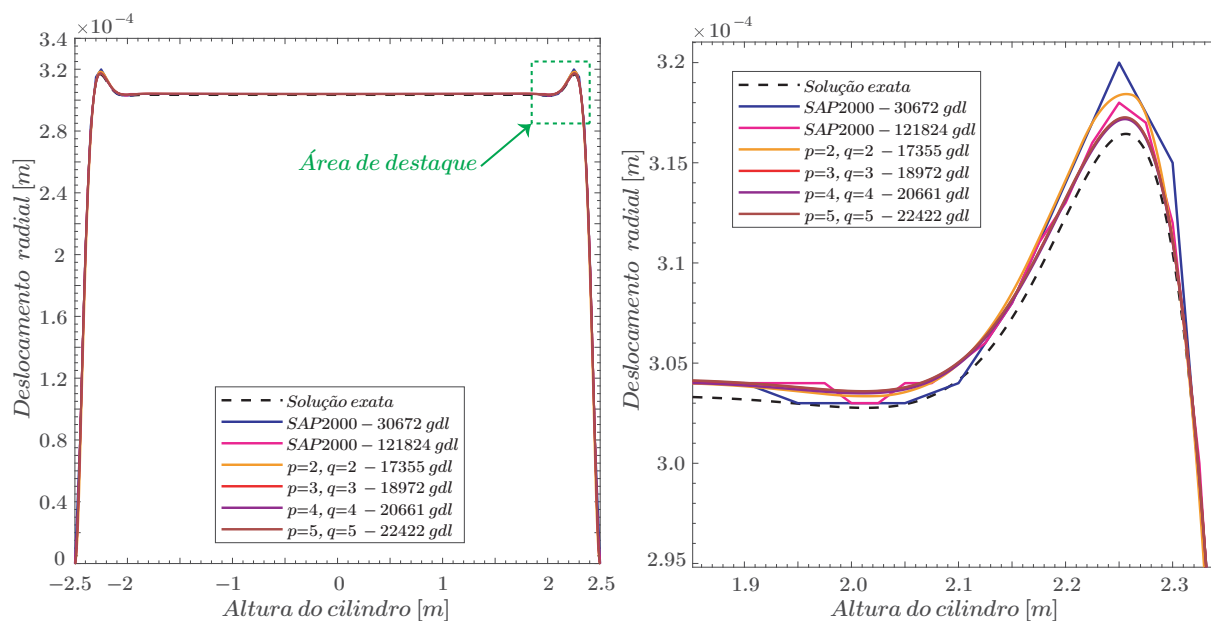


Fonte: O autor.

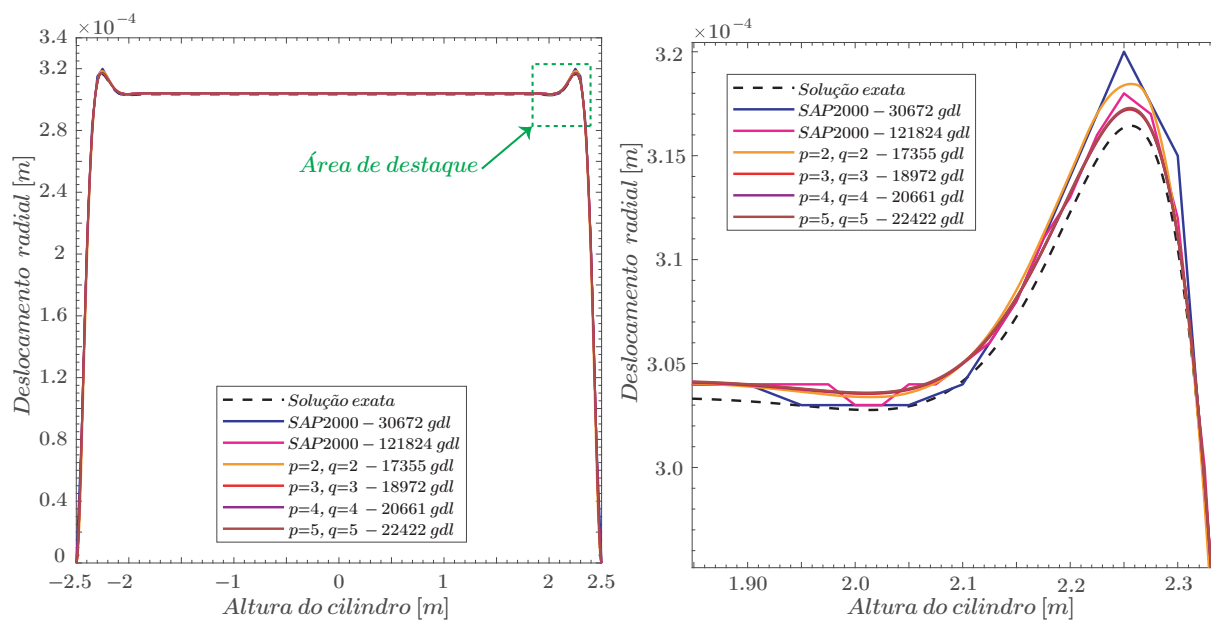
FIGURA 89 – Casca cilíndrica fina. Contornos do deslocamento radial.



Fonte: O autor.

FIGURA 90 – Casca cilíndrica fina. Perfil do deslocamento radial com *Multipatch suaves*.

Fonte: O autor.

FIGURA 91 – Casca cilíndrica fina. Perfil do deslocamento radial com *Faixa de flexão*.

Fonte: O autor.

Na [FIGURA 90](#) e [FIGURA 91](#) à esquerda, mostra-se a convergência do perfil de deslocamento radial para as soluções de *multipach suaves* e *faixa de flexão* respectivamente. Para fins de comparação, a solução da AEF é obtida usando o software *SAP2000™*. Com a finalidade de ter uma melhor visão da convergência se faz um destaque da área onde acontece o fenômeno de camada limite, este destaque se encontra à direita de cada figura. Fazendo uma comparação entre as soluções da AEF e as soluções da AIG, vemos que a AIG fornece uma melhor convergência para todas as ordens polinomiais, com um número menor de graus de liberdade, mostrando a superioridade da AIG sobre a clássica AEF. A solução de convergência obtida é ligeiramente maior à solução exata, dada em [Hughes, Bazilevs e Cottrell \(2009\)](#). A razão para os diferentes resultados é o tratamento diferente das deformações de cisalhamento nas respectivas formulações: na solução exata, foi considerada uma teoria com deformação por cisalhamento enquanto a presente formulação é baseada na teoria de Kirchhoff-Love que despreza as deformações de cisalhamento transversais. Para todas as ordens polinomiais, a convergência é suave e bastante rápida.

## 7 CONCLUSÕES

O objetivo abordado no início desta dissertação é se a *AIG* é mais eficiente e produz resultados mais precisos que a clássica *AEF* por grau de liberdade. Para pesquisar isso, foi implementado um modelo de casca baseado na teoria de *Kirchhoff-Love* e com *NURBS* como funções base. O modelo foi testado em relação a soluções analíticas de referência. Além disso, soluções clássicas da *AEF* foram obtidas através do software *SAPUNSA* que é uma implementação própria do autor desta dissertação, assim como, também do software de análise estrutural *SAP2000™*. Então, estes foram usados como base para comparar as vantagens de eficiência e precisão da *AIG* em comparação com a clássica *AEF*. Finalmente, no último exemplo numérico testamos algumas soluções para o tratamento de estruturas que estão conformadas de vários patches *NURBS* (*multipatch*). Com base em tudo isso, as seguintes conclusões são obtidas:

- *NURBS* provaram ser as funções de base ideais para cascas baseadas na teoria de *Kirchhoff-Love*, já que fornecem a continuidade  $C^1$  necessária entre os elementos. As *NURBS* permitem uma implementação direta da teoria de *Kirchhoff-Love* sem modificações adicionais, o que não é possível de fazer usando polinômios de baixa ordem da clássica *AEF*. Devido à exclusão das deformações de cisalhamento transversais e devido à natureza de ordem superior das *NURBS*, esta formulação fica livre dos típicos fenômenos de travamento em cascas.
- Dos resultados dos exemplos numéricos, pode-se concluir que a *AIG* oferece resultados superiores em termos de precisão e razão de convergência por grau de liberdade. Como se mencionou acima, o fator chave é a capacidade de utilizar continuidades de alta ordem sobre os limites do elemento em comparação com a clássica *AEF*.
- Durante a implementação dos códigos e o estudo dos exemplos numéricos foi notado que, a medida que se aumenta a continuidade a análise resulta computacionalmente mais cara. Isto devido a que para cada incremento do grau polinomial, cada elemento é suporte de mais funções de base *NURBS* aumentando assim o tempo computacional. Porém, antes de tirar conclusões com respeito à eficiência computacional é necessário pesquisar a influência de diferentes métodos numéricos e o tipo de integração numérica, já que o *método de quadratura de Gauss* não é o mais ótimo para a *AIG*.
- Como se mencionou anteriormente perto do 80% de todo o tempo da análise é gasto na geração de malhas adequadas para a *AEF*. Perto do 20% desses 80%

são imediatamente omitidos porque a geometria e a malha estão inerentemente conectadas na *AIG*. Isto foi notado durante o estudo dos exemplos numéricos. Configurar o modelo da análise para a *AIG* foi direto em comparação com o processo de exportação de geometrias e geração de malhas para a *AEF*.

- Nesta dissertação, para a aplicação de condições de simetria e acoplamento de patches foi usado um enfoque de penalização. Da análise dos exemplos numéricos chegou-se a observar uma dificuldade com o valor do *peso de penalização*, já que este valor não pode ser tomado como um valor fixo em geral. Além disso, se o valor do *peso de penalização* é muito grande o sistema de equações tende a ficar mal condicionado. Então, é necessário pesquisar a possibilidade de usar outras técnicas como o *método mestre-escravo* ou *método de multiplicadores de Lagrange*.
- A fim de assegurar a continuidade necessária sobre as bordas comuns entre vários patches foram apresentados os métodos de *multipatch suaves* e *faixa de flexão*. O primeiro método é somente útil para patches que têm continuidade  $G^1$  na borda comum, esta continuidade pode ser mantida por um acoplamento direto dos respectivos graus de liberdade através de um enfoque de penalização. Para patches que se unem num determinado ângulo, isto é uma dobra na borda comum, o *método de multipatch suaves* não pode ser usado porque as equações de restrição descrevem uma relação não linear entre os graus de liberdade e, portanto, uma conformidade exata por acoplamento direto não é possível. O método da *faixa de flexão* cumpre a restrição do ângulo num sentido aproximado. No último exemplo numérico foi testado e provou ser confiável, e é aplicável a *multipatch suaves* e para patches formando uma dobra. As vantagens deste método são a flexibilidade e simplicidade na implementação e aplicação.
- A *Análise IsoGeométrica (AIG)* habilita uma plataforma comum para a análise e o desenho e, portanto, um processo de desenho unificado. Pode-se descrever uma maior complexidade geométrica já que a descrição da geometria é mantida durante todo o processo.

## 7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nas conclusões deste projeto de tese, as seguintes sugestões para trabalhos adicionais são concluídas:

- Fazer a formulação e implementação da *AIG* para casca baseada na teoria de *Reissner - Mindlin*.

- Fazer a formulação e implementação de bases *T-Spline* em vez das bases *NURBS*, para a análise de cascas.
- Fazer a formulação e implementação do método da subdivisão da superfície na *A/G* para a análise de cascas.
- Pesquisar métodos para refinamento local e refinamento adaptativo na *A/G*.
- Pesquisar a influencia de diferentes métodos de solução numérica, na eficiência da *A/G*, por exemplo Colocação, Petrov - Galerkin e elementos de contorno.
- Fazer a formulação e implementação de problemas de análise *fluido - estrutura*.
- Fazer a formulação e implementação para grandes deformações e grandes deslocamentos no enfoque da *A/G* para modelos de cascas.
- Fazer a formulação e implementação da *não linearidade do material* no enfoque da *A/G*.
- Fazer a formulação e implementação da *A/G* no contexto da análise dinâmica de estruturas, tanto para problemas de estruturas com autovalores e autovetores (*modal*), como para es métodos de integração direta.

## REFERÊNCIAS

ADAM, C. et al. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements. Part II: Plates and shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 106–137, 2015. Isogeometric Analysis Special Issue. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.07.020>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514002527>>.

Citado 1 vez na página 60.

ADAM, Cédric et al. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 279, p. 1–28, 2014. ISSN 0045-7825. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.023>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514002096>>.

Citado 1 vez na página 60.

ARGYRIS, J. H.; SCHARPF, D. W. The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method. **The Aeronautical Journal (1968)**, Cambridge University Press, v. 72, n. 694, p. 873–883, 1968. DOI: [10.1017/S0001924000085250](https://doi.org/10.1017/S0001924000085250). Citado 1 vez na página 27.

BASAR, Yavuz; WEICHERT, Dieter. **Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. ISBN 978-3-642-08588-8, 978-3-662-04299-1. Disponível em:

<<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=473f0f5e755e32bc86aa4609bdce24e7>>.

Citado 5 vezes nas páginas 78–80.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1982. (Prentice-Hall civil engineering and engineering mechanics series). ISBN 9780133173055. Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=WYxwQgAACAAJ>>. Citado 1 vez na página 58.

BATHE, Klaus J. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice Hall, 2006. ISBN 9780979004902. Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=rWvefGICf08C>>. Citado 2 vezes nas páginas 22, 57.

BAZILEVS, Y.; BEIRÃO DA VEIGA, L. et al. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. **Mathematical Models and**



**Methods in Applied Sciences**, v. 16, n. 07, p. 1031–1090, 2006. DOI: [10.1142/S0218202506001455](https://doi.org/10.1142/S0218202506001455). eprint: <https://doi.org/10.1142/S0218202506001455>. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218202506001455>>. Citado 1 vez na página 58.

BAZILEVS, Y.; CALO, V.M. et al. Isogeometric analysis using T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5, p. 229–263, 2010. Computational Geometry and Analysis. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.02.036>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509000875>>. Citado 1 vez na página 57.

BEER, Gernot. **Advanced Numerical Simulation Methods**. [S.l.]: London: CRC Press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 27, 72.

BELYTSCHKO, Ted et al. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1, p. 221–258, 1985. ISSN 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90035-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90035-0). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782585900350>>. Citado 6 vezes nas páginas 96, 104, 106.

BENSON, D.J.; BAZILEVS, Y. et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, n. 13, p. 1367–1378, 2011. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.12.003>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510003488>>. Citado 1 vez na página 29.

BENSON, D.J.; BAZILEVS, Y. et al. Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5, p. 276–289, 2010. Computational Geometry and Analysis. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.05.011>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509001820>>. Citado 2 vezes nas páginas 29, 82.

BENSON, D.J.; HARTMANN, S. et al. Blended isogeometric shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 255, p. 133–146, 2013. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.11.020>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512003696>>. Citado 1 vez na página 29.

BOGNER, F.; FOX, R.; SCHMIT, L. The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formula. **In Proceedings 1st**

**Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Ohio**, AFFDLTR-66-80, p. 397–443, 1960. Citado 1 vez na página 27.

CADENA, Diego. **Análise isogeométrica baseada no uso das T-splines aplicada a problemas da elasticidade linear bidimensional**. 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Citado 3 vezes nas páginas 42, 63, 64.

CHAPELLE, D.; BATHE, K.J. **The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals: Fundamentals**. [S.l.]: Springer, 2003. (Computational fluid and solid mechanics). ISBN 9783540413394. Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=ITPEbLp09y0C>>. Citado 3 vezes nas páginas 60, 72, 76.

CHUNG-TZE, Shih. On spline finite element method [J]. **Mathematica Numerica Sinica**, v. 1, 1979. Citado 1 vez na página 28.

CIRAK, Fehmi; ORTIZ, Michael. Fully C1-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 51, n. 7, p. 813–833, 2001. Citado 1 vez na página 57.

CIRAK, Fehmi; ORTIZ, Michael; SCHRÖDER, Peter. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 47, n. 12, p. 2039–2072, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 28, 57.

CIRAK, Fehmi; SCOTT, Michael J. et al. Integrated modeling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision. **Computer-Aided Design**, v. 34, n. 2, p. 137–148, 2002. ISSN 0010-4485. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(01\)00061-6](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(01)00061-6). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448501000616>>. Citado 1 vez na página 57.

COTTRELL, J.A.; HUGHES, T.J.R.; REALI, A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41, p. 4160–4183, 2007. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.04.007>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782507001703>>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 68.

COTTRELL, J.A.; REALI, A. et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 41, p. 5257–5296, 2006. John H. Argyris Memorial Issue. Part II. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.09.027>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505005451>>.

Citado 1 vez na página 28.

DORNISCH, W.; KLINKEL, S.; SIMEON, B. Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 253, p. 491–504, 2013. ISSN 0045-7825. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.09.010>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512002927>>.

Citado 1 vez na página 29.

DORNISCH, W.; MÜLLER, R.; KLINKEL, S. An efficient and robust rotational formulation for isogeometric Reissner–Mindlin shell elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 303, p. 1–34, 2016. ISSN 0045-7825. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.01.018>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516300111>>.

Citado 2 vezes nas páginas 29, 82.

DU, Xiaoxiao; ZHAO, Gang; WANG, Wei. Nitsche method for isogeometric analysis of Reissner–Mindlin plate with non-conforming multi-patches. **Computer Aided Geometric Design**, v. 35-36, p. 121–136, 2015. Geometric Modeling and Processing 2015. ISSN 0167-8396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2015.03.005>.

Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016783961500028X>>.

Citado 2 vezes nas páginas 29, 82.

FAN, S.; LUAH, M. New spline finite element for analysis of shells of revolution. **Journal of engineering mechanics**, n. 116, p. 709–726, 1990. Citado 1 vez na página 28.

FARIN, Gerald. **Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide**. 5th. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2002. ISBN 1-55860-737-4.

Citado 1 vez na página 30.

FELIPPA, Carlos A. **Introduction to Finite Elements Methods**. Edição:

Department of Aerospace Engineering Sciences e Center for Aerospace Structures.

[S.I.]: University of Colorado, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 95, 127.

GARCÍA, Jorge L.; FRISANCHO, Juan M. **Calculo de estructuras por el método de los elementos finitos y su implementación por computadora**. [S.I.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 27, 98.

GEE, Michael; RAMM, Ekkehard; WALL, Wolfgang A. Parallel multilevel solution of nonlinear shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 21, p. 2513–2533, 2005. Computational Methods for Shells. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.043>. Disponível

em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504005432>>. Citado 1 vez na página 56.

GUO, Yujie. **Isogeometric analysis for thin-walled composite structures**. 2016. Tese (Doutorado) – Technische Universiteit Delft. Citado 0 vezes nas páginas 42, 49–51.

HOLZAPFEL, Gerhard A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0471823198 9780471823193 047182304X 9780471823049. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=2eab99dfc2bb1f22fbeb0af03e6e5464>>. Citado 2 vezes nas páginas 77, 78.

HUGHES, T.J.R.; COTTRELL, J.A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39, p. 4135–4195, 2005. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504005171>>. Citado 8 vezes nas páginas 23, 24, 28, 30, 56, 59, 68.

HUGHES, T.J.R.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5, p. 301–313, 2010. Computational Geometry and Analysis. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.004>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782508004295>>. Citado 1 vez na página 59.

HUGHES, Thomas JR. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 22, 57.

HUGHES, Thomas JR; BAZILEVS, Yuri; COTTRELL, J Austin. **Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 12 vezes nas páginas 23, 30, 41, 42, 56, 57, 62, 64, 66, 68, 96, 123, 133.

IBRAHIMBEGOVIĆ, Adnan. A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 7, n. 2, p. 167–179, 1990. ISSN 0168-874X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(90\)90008-3](https://doi.org/10.1016/0168-874X(90)90008-3). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168874X90900083>>. Citado 2 vezes nas páginas 27, 98.

IBRAHIMBEGOVIĆ, Adnan. Quadrilateral finite elements for analysis of thick and thin plates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 110, n. 3, p. 195–209, 1993. ISSN 0045-7825. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(93\)90160-Y](https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90160-Y). Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004578259390160Y>>. Citado 2 vezes nas páginas 27, 98.

KIENDL, J.; BAZILEVS, Y. et al. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 37, p. 2403–2416, 2010. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.029>. Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510001064>>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 96, 128.

KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U. et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 49, p. 3902–3914, 2009. ISSN 0045-7825. DOI:  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.013>. Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509002680>>. Citado 4 vezes nas páginas 24, 29, 72, 87.

KIENDL, Josef M. **Isogeometric Analysis and Shape Optimal Design of Shell Structures**. 2011. Tese (Doutorado) – TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN. Citado 9 vezes nas páginas 22, 52, 55, 60, 67, 72, 83, 87, 96, 122.

LIPTON, S. et al. Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5, p. 357–373, 2010. Computational Geometry and Analysis. ISSN 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.01.022>. Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509000346>>. Citado 1 vez na página 122.

LONG, Quan; BURKHARD BORNEMANN, P.; CIRAK, Fehmi. Shear-flexible subdivision shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 90, n. 13, p. 1549–1577, 2012. DOI: [10.1002/nme.3368](https://doi.org/10.1002/nme.3368). Disponível em:  
<<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.3368>>. Citado 1 vez na página 28.

MACNEAL, Richard H.; HARDER, Robert L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 1, n. 1, p. 3–20, 1985. ISSN 0168-874X. DOI:  
[https://doi.org/10.1016/0168-874X\(85\)90003-4](https://doi.org/10.1016/0168-874X(85)90003-4). Disponível em:  
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168874X85900034>>. Citado 8 vezes nas páginas 96, 97, 112, 114.

OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2013. (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences). ISBN 9781402087424.

Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AgvVsgEACAAJ>>. Citado 8 vezes nas páginas 22, 23, 27, 60, 80, 85.

OÑATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2010. (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences). ISBN 9781402087332. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=lzZrTwy7%5C\\_ToC](https://books.google.com.br/books?id=lzZrTwy7%5C_ToC)>. Citado 2 vezes nas páginas 22, 58.

PERDIGÃO DO CARMO, Manfredo. **Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition**. 2ed. [S.l.]: Dover Publications, Inc, 2016. (Dover Books on Mathematics). ISBN 0-486-80699-5, 978-0-486-80699-0. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=31e323c7f16e529a2b0b9355a2fe3e31>>. Citado 4 vezes nas páginas 72, 74, 75.

PETERS, J.; REIF, U. **Subdivision Surfaces**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Geometry and Computing). ISBN 9783540764069. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=J7iJCBUSZDYC>>. Citado 1 vez na página 56.

PIEGL, Les; TILLER, Wayne. **The NURBS Book (2Nd Ed.)** Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. ISBN 3-540-61545-8. Citado 11 vezes nas páginas 30, 32, 34, 44, 48, 49, 56, 57, 124.

PRENTER, P.M. **Splines and Variational Methods**. [S.l.]: Wiley, 1975. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471696605. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=RYTr2okd8F0C>>. Citado 1 vez na página 28.

ROGERS, David F. **An Introduction to NURBS: With Historical Perspective**. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001. ISBN 1-55860-669-6. Citado 3 vezes nas páginas 30, 52, 53.

SAFARI, Puria; ALMSTEDT, Sara. **Isogeometric Analysis of Curved Beams and Thin Shells**. 2017. Diss. (Mestrado) – CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY. Citado 2 vezes nas páginas 60, 72, 76.

SEDERBERG, Thomas W. et al. T-splines and T-NURCCs. **ACM Trans. Graph.**, ACM, New York, NY, USA, v. 22, n. 3, p. 477–484, jul. 2003. ISSN 0730-0301. DOI: 10.1145/882262.882295. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/882262.882295>>. Citado 1 vez na página 56.



SWARTZ, Blair; WENDROFF, Burton. The Relative Efficiency of Finite Difference and Finite Element Methods. I: Hyperbolic Problems and Splines. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Society for Industrial e Applied Mathematics, v. 11, n. 5, p. 979–993, 1974. ISSN 00361429. Disponível em:

<<http://www.jstor.org/stable/2156037>>. Citado 1 vez na página 28.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1959. (Engineering societies monographs). Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=rTQFAAAAMAAJ>>. Citado 1 vez na página 123.

VEIGA, L. Beirão da et al. An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 209-212, p. 45–53, 2012. ISSN 0045-7825. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.10.009>. Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511003215>>.

Citado 2 vezes nas páginas 29, 82.

WUNDERLICH, Walter; PILKEY, Walter D. **Mechanics of Structures Variational and Computational Methods**. 2nd. [S.l.]: CRC Press, 2002. ISBN

0849307007,9781420041835,9780849307003. Disponível em: <[http:](http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=14CECF991D60B3251E40035DCD1FCCAF)

[//gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=14CECF991D60B3251E40035DCD1FCCAF](http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=14CECF991D60B3251E40035DCD1FCCAF)>.

Citado 1 vez na página 80.

ZHOU, Long. **pxhere**. [S.l.: s.n.], 2019. <https://pxhere.com>. Acessado : 2019-01-31.

Disponível em: <<https://pxhere.com>>. Citado 0 vezes nas páginas 70, 71.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method: Solid mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. (Knovel Library). ISBN 9780750650557.

Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=MhgBfMWFVHUC>>. Citado 2 vezes nas páginas 27, 60.

ZIENKIEWICZ, Olgierd C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method: The basis**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. (Fluid Dynamics). ISBN 9780750650496.

Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=x4BGAAAAAYAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 22, 58.